454. 單位円内デ準調デアル函數ニ付テノ一注意

河田龍夫（＝高橋龍夫）（東北大）

1. $u(\rho,\theta)$ ヲ單位円 $|\rho e^{i\theta}|<1$ ノ内部デ連続且ツ準調和トスル。ソシテ

$$(1,1)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(\rho,\theta)|^{p}d\theta \leqq A \qquad (0\leqq\rho<1)$$

トスル。茲ニ $p>1$ デアル。A ハ ρ ニ無関係ナ常數デアル。以下 A ハ ρ ニ無関係ナ常數トシソノ値ハ場所ニヨツテ同ジデアル必要ハナイトスル。準調和函數ノ斯様ナ class ニ関シテハ、丁度解析函數ノ場合ニ於ケルヤウニ、ρ ガ 1 ニ近ヅケタトキ，$u(\rho,\theta)$ ガ一ツノ境界函數（boundary function）ニ近ヅクカドウカ，又如何ナル意味デ近ヅクカト云フコトハ重要ナ問題デアル。解析函數ニ對スル F. Riesz ノ定理ニ對應スルモノトシテ次ノ定理ガ知ラレテヰル。

$p>1$ ニシテ (1,1) ガ満足サレテヰルナラバ一ツノ函數 $u(\theta)$ ガ存在シテ

$$(1,2)\qquad \lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|u(\rho,\theta)-u(\theta)|^{q}d\theta=0$$

デアル．茲ニ $0<q<p$。

コノ定理ハ J. E. Littlewood (Journal London Math. Soc., vol. 2, 1927) ニヨツテ証明セラレタモノデアルガ茲ニ注意スベキハ $0<q<p$ ナル附加條件デアル。

$1 \geqq p > 0$ デハ一般ニ眞デナイカラ F. Riesz ノ定理ノ擴張デナイコトハ勿論デアルガ $p>1$ ノ場合デモ、コノ附加條件ノタメニ擴張ニナツテヰナイ。併シコノ定理ニ於ケル假定ダケデ $q=p$ デモ成立スルカ否カハ不明デアル。コノ論文ノ目的ハ更ニモウ一ツノ條件ヲ加ヘテ $q=p$ デ $(1,2)$ ヲ結論スルコトニアル。即チ

<u>定理1.</u> $p>1$ デ $u(\rho,\theta)$ ガ $|\rho e^{i\theta}|<1$ ナル單位円ノ内部デ連続且ツ準調和トシ、更ニ負ニナラナイトスル。若シ $(1,1)$ ガ満足サレテヰルナラバ一ツノ境界函数 $u(\theta)$ ガ存在シテ

$$\lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(\rho,\theta)-u(\theta)\right|^{p}d\theta=0$$

コノ定理ノ証明ノタメニ次ノ定理ヲ使フ、之レハ M. Riesz ニ負フモノデアル。

$f(x,y)$ ガ y ニ関シテ $c<y<d$ デ p 乘ガ可積分 $(a<x<b$ トスル$)$ デ $x\to b$（或ハ $x\to a$ デモヨイ）ノトキ一ツノ函数 $f(y)$ ニ弱收斂スルトスル。茲ニ a, b ハ夫々 $-\infty, \infty$ ヲモ含メテ考ヘル。且ツ

$$\lim_{x\to b}\int_{c}^{d}\left|f(x,y)\right|^{p}dy=\int_{c}^{d}\left|f(y)\right|^{p}dy$$

ナラバ $f(x,y)$ ハ $f(y)$ ニ强收斂スル。

定理1ヲ証明シヤウ。今

$$u(\rho,\theta,r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(r,\phi)\,\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\phi-\theta)+\rho^2}\,d\phi$$

トオクト、前記 *Littlewood* ノ論文中カラ次ノコトガ判ッテキル。

(1,3) $u(\rho,\theta;r)$ ハ $r\to 1$ ノトキ単位円デ調和デアル如キ一ツノ函数 $u^*(\rho,\theta)$ $|\to$ ニ近ヅク。

$$(1,4)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u^*(\rho,\theta)\right|^p d\theta \leqq A$$

$$(1,5)\quad u(\rho,\theta)\leqq u^*(\rho,\theta)$$

吾々ノ場合ニ於イテハ $u(\rho,\theta)$ ガ負ニナラナイカラ (1,5) カラ $u^*(\rho,\theta)$ モ負ニナラズ随ッテ実ハ (1,4) ニ於ケル絶對値ノ符号ハ不要デアル。

(1,4) ト調和函数ニ関スル *F. Riesz* ノ定理カラ

$$(1,6)\quad \lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u^*(\rho,\theta)-u(\theta)\right|^p d\theta=0$$

ナル如キ函数 $u(\theta)$ ガ存在スル。又上述シタ *Littlewood* ノ定理カラ

$$(1,7)\quad \lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(\rho,\theta)-u(\theta)\right| d\theta=0$$

コノ式ニ於ケル $u(\theta)$ ハ (1,6) ニ於ケルモノト同一ナルコトハ *Littlewood* ノ原論文ニ徴シテ見レバ明カデアル。u^* ノ定義カラ

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left\{u^*(\rho,\theta)\right\}^p d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(r,\phi)\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2}d\phi\right\}^p d\theta$$

$$\leqq \varliminf_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(r,\phi)\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2}d\phi\right\}^p d\theta$$

$$\leqq \varliminf_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u^p(r,\phi)\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2}d\phi$$

$$=\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} u^p(r;\phi)\,d\phi$$

茲ニ最初ノ不等号ノ部分ニ Fatou ノ定理ヲ用ヒタ。斯様ニシテ

$$\overline{\lim_{\rho\to 1}}\int_{-\pi}^{\pi}\{u^*(\rho,\theta)\}^p d\theta \leqq \lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} u^p(\rho,\theta)\,d\theta$$

が得ラレタ。之レヲ(1,5)ノ直接ノ結果デアル所ノ

$$\overline{\lim_{\rho\to 1}}\int_{-\pi}^{\pi} u^p(\rho,\theta)\,d\theta \leqq \overline{\lim_{\rho\to 1}}\int_{-\pi}^{\pi}\{u^*(\rho,\theta)\}^p d\theta,$$

$$\underline{\lim_{\rho\to 1}}\int_{-\pi}^{\pi} u^p(\rho,\theta)\,d\theta \leqq \underline{\lim_{\rho\to 1}}\int_{-\pi}^{\pi}\{u^*(\rho,\theta)\}^p d\theta$$

ト組合シテ

$$(1,8)\quad \lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\{u^*(\rho,\theta)\}^p d\theta = \lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} u^p(\rho,\theta)\,d\theta$$

ヲ得ル。

(1,7)カラ $-\pi \leqq x \leqq \pi$ ナル任意ノ x ニ對シテ

$$\lim_{\rho\to 1}\int_{\pi}^{x} u(\rho,\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{x} u(\theta)\,d\theta$$

故ニ(1,1)ナル假定ニ注意スルト $u(\rho,\theta)$ が $u(\theta)$ ニ p 次ノ弱收斂ヲスル。從ツテ前記ノ M. Riesz ノ定理カラ(1,8)ヲ考ヘニ入レテ $u(\rho,\theta)$ が $u(\theta)$ ニ p 次ノ强收斂ヲスル。之レデ定理が得ラレタコトニナル。

2. Littlewood ノ定理ダケデハ $u(\rho,\theta)$ が $u(\theta)$ ニ 1 次ノ强收斂スルタメニハ(1,1)が $p>1$ デ成立シテオラネ

バ駄目デアル。吾々ノコノ事實ヲ少シク擴張スル。

補助定理 I. $v(\rho,\theta)$ が單位円ノ内部デ調和デ且ツ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|v(\rho,\theta)|\overset{+}{\log}|v(\rho,\theta)|d\theta\leqq A$$

ナラバ一ツノ可積分函数 $v(\theta)$ が存在シテ

$$\lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|v(\rho,\theta)-v(\theta)|d\theta=0$$

$v(\rho,\theta)$ ノ共軛函數ヲ $\overline{v}(\rho,\theta)$ トスルト補助定理ノ假定ノ下ニ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\overline{v}(\rho,\theta)|d\theta\leqq A$ デアルトイフ事實ヲ知ッテオレバ F. Riesz ノ定理カラコノ補助定理ハ殆ンド自明デアル。

Littlewood が (1,3), (1,4), (1,5) ヲ証明シタ如クニシテ次ノ補助定理ヲ証明スルコトが出來ル。

補助定理 2. $u(\rho,\theta)$ が單位円内デ連続ナ準調和ナ函數デ

$$(2,1)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(\rho,\theta)|\overset{+}{\log}|u(\rho,\theta)|d\theta\leqq A$$

トスル。$u(\rho,\theta;r)$ ヲ §1 ニ於ケル如ク定義スルト，次ノ事實が成立スル。

(2,2) $u(\rho,\theta;r)$ ハ r ト共ニ單調ニ増加スル。

(2,3) $u(\rho,\theta;r)$ ハ $r\to 1$ ノトキ一ツノ調和函數 $u^{*}(\rho,\theta)$ ニ近ヅク。

$$(2,4)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u^{*}(\rho,\theta)|\overset{+}{\log}|u^{*}(\rho,\theta)|d\theta\leqq A$$

(2.5)　$u(\rho,\theta)\leqq u^*(\rho,\theta)$

上ノ二ツノ補助定理ガ得ラレルト後ハ丁度 Littlewood ガヤツタノト同ジニシテ次ノ定理ヲ証明スルコトガ出來ル。証明ハ簡單デアル。

定理2. $u(\rho,\theta)$ ガ単位円デ連続且ツ準調和トシ，且ツ(2,1)ヲ満足スルトスル。ソウスルト一ツノ函數 $u(\theta)$ ガ存在シテ

$$\lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(\rho,\theta)-u(\theta)\right|d\theta=0$$

デアル，