465. 直線叢論 I

武田 楠雄（旅順中）

序

1°. 以後連続的乃至非連続的ニ若干回ニ亘ッテ線叢ニツイテノ特異性質ヲ指摘スルコトニスル。

p^{ij} $(i, j = 0, 1, 2, 3)$ ヲ以テ 3 次元射影的空間 R_3 ノ Plücker 座標デアルトスレバ周知ノ如ク，夫レ等ノ間ニハ

$$p^{ij}+p^{ji}=0,$$

$$(1)\qquad p^{01}p^{23}-p^{02}p^{13}+p^{03}p^{12}=0$$

ナル関係ガアル。マタ二直線 p, q ガ交ハルタメノ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ

$$((p, q))=p^{01}q^{23}-p^{02}q^{13}+p^{03}q^{12}+p^{12}q^{03}-p^{13}q^{02}+p^{23}q^{01}=0.$$

ノ満足サレルコトデアル。

p^{ij} ガ2ツノ parameter u, v ノ函數デアルトスルト，u^1, u^2 ガ変化スレバ直線 p ハ一ツノ直線叢 K ヲ画ク。

$$p_i=\frac{\partial p}{\partial u^i}\qquad (i=1,2)$$

トオケバ

$$((p\ p))=0,\quad ((p\ p_1))=0,\quad ((p\ p_2))=0$$

トナル。今

$$-((p_i\, p_j))=H_{ij}\qquad (i,j=1,2)$$

トオク。

2°. $p^{ij}(0,1,2,3)$ ナル座標ヲ有スル直線 p ヲ5次元空間内ニ於イテ考ヘレバ p ハ(1)ニヨリテ與ヘラレル4次元2次面 Θ_4 上ニ横ハル一点ト考ヘルコトガ出来ル。コノ点ヲ3次元ノ直線ノ像ト名付ケル。

扨テ $H_{ij}\equiv 0\ (i,j=0,1,2,3)$ ナラバ線叢 K ハ束線カ平面上ノ全直線ヲ示ス。マタ

$$H=\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}$$

トオイタトキ $H\equiv 0$ ナラバ K ハ一ツノ㚖曲面ヲ有スル線叢トナル。

今 $H\neq 0$ ナル場合ニ限ルコトニスル。コノトキハ K ハ2ツノ㚖曲面ヲ有スル線叢トナル.

5次元ニ於テ，p, p_1, p_2 ヲ以テ決定サレル平面 L_2 ハKノ像Vノ p ニ於ケル切平面デアリ、L_2 トソレノ Θ_4 ニ関スル共軛ナル図形 L_2' トヲ含ム L_4 ハ p ニ於ケル Θ_4 ヘノ極超平面即チ切超平面トナル。今 p_5 ヲコノ切超平面以外ニシテ且ツ Θ_4 上ノ一点デアルトスレバ平面 $pp_1p_2p_5$ ハ $pp_1p_2p_5$ ノ共軛 L_1' ト共通点ヲ有シナイカラ，L_1' ハ Θ_4 ト異ナル2点 p_3, p_4 デ交ハル。p_3, p_4 ハ切平面 $pp_1p_2p_3p_4$ 上ノ点デアリ且ツ p, p_1, p_2 トハ独立デアルカラ pp_k; p_5p_k $(k=3,4)$ ハ Θ_4 ノ母線デアル。従ツテ L_1' ハ Θ_4 ノ母線デハナク p_3, p_4 ハ互ニ共軛デハナイ。

以上ニヨリ

$$((p_i\ p_5))=0,\quad ((p_k\ p_5))=0,\quad ((p_k\ p_k))=0$$
$$(i=1,2;\ k=3,4)$$

及ビ

$$((p\ p_5))\neq 0,\quad ((p_3\ p_4))\neq 0$$

ヲ得ル。

従ツテ p, p_5 ノ座標ニ適當ナ因数ヲカケルコトニヨリ $((p\ p_5))=1$ トスルコトが出来，同様ニ $((p_3\ p_4))=1$ ヲ得ル。

以上ニヨリ

$j \backslash i$	p	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p	0	0	0	0	0	1
p_1	0	$-H_{11}$	$-H_{12}$	0	0	0
p_2	0	$-H_{12}$	$-H_{22}$	0	0	0
p_3	0	0	0	0	1	0
p_4	0	0	0	1	0	0
p_5	1	0	0	0	0	0

3°. 今 $dp_l = \sum_{\varkappa=0}^{5} d\omega_l^{\varkappa} p_{\varkappa} \quad (l, \varkappa = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$

トオケバ

$$d\omega_0^0 = 0, \quad d\omega_0^i = du^i \ (i = 1, 2), \cdot d\omega_0^3 = d\omega_0^4 = d\omega_0^5 = 0$$

トナル。マタ

$$\frac{\partial \omega_i^0}{\partial u^j} = E_{ij}, \quad \frac{\partial \omega_i^3}{\partial u^j} = F_{ij}, \quad \frac{\partial \omega_i^4}{\partial u^j} = G_{ij},$$

$$\frac{\partial \omega_i^j}{\partial u^l} = \Gamma_{i\ l}^{\ j} \qquad (i, j, l = 1, 2)$$

$$\frac{\partial \omega_3^0}{\partial u^i} = M_i, \quad \frac{\partial \omega_4^0}{\partial u^i} = N_i, \quad \frac{\partial \omega_3^3}{\partial u^i} = L_i \quad (i = 1, 2)$$

トオク。今 p_5 トシテ

$$p_5 = \frac{1}{2} H^{\sigma\tau} \frac{\overline{\partial}^2 p}{\partial u^\sigma \partial u^\tau} + \rho p$$

但シ $\rho = -\frac{1}{8} H^{\sigma\tau} H^{\lambda\mu} \left(\left(\frac{\overline{\partial}^2 p}{\partial u^\sigma \partial u^\tau} \quad \frac{\overline{\partial}^2 p}{\partial u^\lambda \partial u^\mu} \right) \right)$

（$\bar{d}$ハ絶對微分，α, σ ナドハ添數 1,2 ニツイテノ summation）トトレバ、コレハ前節ニトッタ p_5 ヲ一意的ニ決定スル一ツノ方法トナル。

$((p_k \quad p_5)) = 0 \qquad (k=3,4)$ ヨリ

$$F_\sigma^\sigma = 0, \quad G_\alpha^\alpha = 0$$

ヲ得ル。

以上ニヨリ線叢ノ基本方程式ハ

$$(\mathrm{I})\begin{cases} dp = p_\sigma du^\sigma \\ \bar{d}p_i = E_{i\sigma} du^\sigma + F_{i\sigma} du^\sigma + G_{i\sigma} du^\sigma + H_{i\sigma} du^\sigma \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=1,2) \\ dp_3 = M_\sigma du^\sigma p + G_\sigma^\rho du^\sigma p_\rho + L_\sigma du^\sigma p_3 \\ dp_4 = N_\sigma du^\sigma p + F_\sigma^\rho du^\sigma p_\rho - L_\sigma du^\sigma p_4 \\ dp_5 = E_\sigma^\rho du^\sigma p_\rho - N_\sigma du^\sigma p_3 - M_\sigma du^\sigma p_4 \end{cases}$$

トナル。