467. 直線叢論 III

武田楠雄（旅順中）

9° モシ$G_{22}=0$ナルトキハ（I）ヨリ明カナル如ク，PハA_1ヲ頂点トスルConeヲ画キ，従ッテ線叢$\underline{K}$ハカクノ如

キ ∞^1 ノ Cone ヲ集リトナル。殊ニ $G_{22}=F_{22}=0$ ナルトキハコノ Cone ハ A_1 ヲ中心トシ A_1 ニ於ケル S_1 ヘノ切平面上ニ於ケル flat pencil トナル。叉曲面 S_1 ハコレラノ場合ハ明カニ曲線トナル。其ノ他ノ特殊ナル場合モ容易ニ吟味シ得ル。

殊ニ $F_{11}=F_{22}=G_{11}=G_{22}=0$ ナルトキハ線叢Kノ p_3, p_4 ハ変ラズ、従ツテ1次線叢トナル。

コノ線叢ヲ線叢Kノ添付一次線叢 K_u ト名付ケル。K_u ノ方程式ハ R_5 ニ於テ

$$z^5=H_{12}\,z^1z^2,\quad z^3=0,\quad z^4=0$$

デ示サレルカラ，R_5 ニ於テ pp_5, $p_u p_v$ ハ K_u ノ像 V_u ニ関シテ互ニ polar デアル。マタ p_u, p_v ガ一度トラレレバ p_5 ハ一ツ丈ケ確定スル。コノコトヨリ2直線 $p_u+\alpha_1 p$, $p_v+\alpha_2 p$ ハ K_u ニ関シテ

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}=\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}$$

ナルトキニ限リ互ニ polar デアルト考ヘルヲ得ル。

不変量ノ幾何學的意味

10°. $p(u,v)$ ニ無限ニ近イKノ一直線

$$p'(u+du,\ v+dv)$$

ヲトレバ

$$p'=p+dp+\frac{1}{2}d^2p+\frac{1}{6}d^3p+\cdots\cdots$$
$$=\{1+[2]\}p+\{du+\tfrac{1}{2}(d^2u+\theta_u\,du^2)+[3]\}p_u$$

$$+\left[dv+\frac{1}{2}(d^2v+\theta_v dv^2)+[3]\right]p_v$$

(4) $$+\left[\frac{1}{2}(F_{11}du^2+F_{22}dv^2)+[3]\right]p_3$$

$$+\left[\frac{1}{2}(G_{11}du^2+G_{22}dv^2)+[3]\right]p_4$$

$$+\left[H_{12}du\,dv+\frac{1}{2}H_{12}(\theta_u du^2 dv+\theta_v du\,dv^2+d^2u\,dv+du\,d^2v)+[4]\right]p_5$$

トナル。コヽニ $[i]$ ハ du, dv ニ関スル i 次ノ有次無限小ヲ示ス。

同様ニシテ

(5)
$$\begin{aligned}p_4'(u+du,\ v+dv) &= p_4+dp_4+\cdots\cdots \\ &= \{(N_1du+N_2dv)+[2]\}p \\ &+\{F_2^1dv+[2]\}p_u+\{F_1^2du+[2]\}p_v \\ &+(F_1^2F_{22}du\,dv+[3])p_3+\{1-(L_1du+L_2dv)+[2]\}p_4 \\ &+\{\tfrac{1}{2}(F_{11}du^2+F_{22}dv^2)+[3]\}p_5,\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}p_3'(u+du,\ v+dv) &= p_3+dp_3+\cdots\cdots \\ &= \{(M_1du+M_2dv)+[2]\}p \\ &+(G_2^1dv+[2])p_u+(G_1^2du+[2])p_v \\ &+\{1+(L_1du+L_2dv)+[2]\}p_3+(G_1^2G_{22}du\,dv+[3])p_4 \\ &+\{\tfrac{1}{2}(G_{11}du^2+G_{22}dv^2)+[3]\}p_5\end{aligned}$$

ヲ得ル。

(4) ヨリ p' ハ2平面 pp_4, pp_3 ヲ夫々

$$T_0:\left(du+[2],\ \frac{1}{2}(F_{11}du^2+F_{22}dv^2)+[3],\ 0,\ -H_{12}du\,dv+[3]\right),$$

$$T_1:\left(\frac{1}{2}(G_{11}du^2+G_{22}dv^2)+[3],\ H_{12}dv+[2],\ H_{12}du\,dv+[3],0\right)$$

デ切ルコトヲ知ル。今 T_0, T_1 ヲ夫々 p_4 及ビ p_3 上ノ任意ノ一点ヨリ p 上ニ射影シタ点ヲ夫々 T_0', T_1' トスレバ

$$[A_0\ A_1\ T_0'\ T_1'] = \frac{1}{4}\frac{(F_{11}du^2+F_{22}dv^2)(G_{11}du^2+G_{22}dv^2)}{H_{12}\,du\,dv} + \cdots$$

トナル。依ッテ

2ツノ異ナル曲面 S_0, S_1 ヲ有スル線叢 K ノ一直線 p ガ S_0, S_1 ニ夫々 A_0, A_1 ニ於テ切スルトスル。K ニ属シ p ヲ含ム線織面上 p ニ無限ニ近イ一直線 p' ガ A_0 ニ於ケル S_0 ノ切平面, A_1 ニ於ケル S_1 ノ切平面ヲ切ル点ヲ夫々 T_0, T_1 トスル。

マタ S_0 上 A_0 ニ於ケル漸近切線ニ関シテ p ノ調和共軛線ヲ p_4, S_1 上 A_1 ニ於ケル漸近切線ニ関シテ p ノ調和共軛線ヲ p_3 トシ, T_0, T_1 ヲ夫々 p_4, p_3 上ノ任意ノ点ヨリ p 上ニ射影シテ得タ点ヲ T_0', T_1' トスレバ非調和比 $[A_0, A_1, T_0', T_1']$ ハ不変量

$$\frac{F_{\sigma\tau}G_{\lambda\mu}\,du^\sigma du^\tau du^\lambda du^\mu}{H_{\sigma\tau}\,du^\sigma du^\tau}$$

ヲ主値トスル無限小デアル。

コレヲ今, 線叢 K ノ射影的線元素ト名付ケル。

11.° 同様ニシテ p_4' ハ例ヘバ

$$S_0:\ \left(F_2^1 dv + [2],\ F_1^2F_{22}\,du\,dv + [3],\ 0,\ -\frac{1}{2}(F_{11}du^2 + F_{22}dv^2) + [3]\right)$$

$$S_1:\ \left(1+[1],\ F_{11}du + [2],\ \frac{1}{2}(F_{11}du^2 + F_{22}dv^2) + [3],\ 0\right)$$

ヲ結ビ付ケル直線ガアリ, p_3' ハ

$$W_0:\ \left(G_2^1 dv + [2],\ 1+[1],\ 0,\ -\frac{1}{2}(G_{11}du^2 + G_{22}dv^2) + [3]\right)$$

$$W_1:\ \left(G_1^2G_{22}\,du\,dv + [3],\ G_{11}du + [2],\ \frac{1}{2}(G_{11}du^2 + G_{22}dv^2) + [3],\ 0\right)$$

ヲ結ビツケル直線デアル。依ッテ前定理ノ符号ヲ襲用スレバ次ノ如キ性質ガアル。

直線 p' ガ S_0, ニ切スル点ヲ A_0', トシ S_0 上 A_0' ニ於テ S_0 ノ漸近切線ニ関シテ p' ノ調和共軛線ヲ p_4' トスル。今 P_2, P_3, P', P_4' ヲ以テ四直線 p_2, p_3, p', p_4' ガ A_0' ニ於ケル S_0 ノ切平面及ビ A_1 ニ於ケル S_1 ノ切平面ノ交線ヲ切ル4点トスレバ非調和比 $2[P\ P_3,\ P'P_4']$ ハ與ヘラレタ線叢ノ射影的線元素ヲ主値トスル無限小デアル。

コノ性質ハ曲面 S_0 ト S_1 トヲ交換シテモ全ク同様ニ成立スル。

12°. p' ガ S_0, S_1 ニ切スル点ヲ A_0', A_1' トスレバ, 若干ノ考察ノ後, S_0 ノ A_0' ニ於ケル切平面及ビ S_1 ノ A_1' ニ於ケル切平面ガ p ヲ切ル2点ハ夫々

$$P:\ \left(du+[2],\ \tfrac{1}{2}(F_{11}\,du^2-F_{22}\,dv^2)+[3],\ 0,\ 0\right)$$

$$Q:\ \left(\tfrac{1}{2}(G_{11}\,du^2-G_{22}\,dv^2)+[3],\ -H_{12}\,du\,dv+[3],\ 0,\ 0\right)$$

デ與ヘラレルコトヲ知ル。故ニ

$$[A_0\ A_1\ P\ Q]=-\frac{1}{4}\,\frac{(F_{11}du^2-F_{22}dv^2)(G_{11}du^2-G_{22}dv^2)}{H_{12}\,du\,dv}+[3]$$

依ッテ前ト同様ニ前定理ノ記号ヲ襲用スレバ

直線 p' ガ S_0, S_1 ニ切スル点 A_0', A_1' ニ於ケル S_0, S_1 ノ切平面ガ直線 p ヲ切ル2点ヲ夫々 P, Q トスレバ, 非調和比

$$[A_0\ A_1\ P\ Q]+\tfrac{1}{2}[A_0\ A_1\ T_0'\ T_1']$$

ハ不変量

$$\frac{1}{4}\Lambda H_{\sigma\tau}\,du^\sigma du^\tau$$

ヲ主値トスル無限小デアル。