474. 線形微分方程式ノ特異点, II

福原満洲雄（北大）

前回ニ述ベタ所ニヨリ最初カラ

$$(1)\quad \frac{dy_j}{dx}=\lambda_j(x)y_j+x^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(x)y_k$$

$$(j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ヲ考ヘテ差支ヘナイコトガ分ッタ. 但シ $\lambda_j(x)$ ハ x ノ整多項式, $a_{jk}(x)$ ハ $x\to\infty$ ノ時

$$(2)\quad a_{jk}(x)\sim\sum_{r=0}^{\infty}a_{jk}^{(r)}x^{-r}\qquad (j,k=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル形ニ展開サレル函数デアル。(1) ガ

$$(3)\quad y_j\sim\sum_{r=0}^{\infty}\alpha_j^{(r)}x^{-r}\qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル形ノ形式的解ヲ持ツ場合ニツイテ述ベヨウ。$\log x$ ガ形式的解ノ中ニ表ハレテモ特別ニ変ッタコトモナイ。

$$(4)\quad y_j\sim e^{\Lambda(x)}x^{\rho}\sum_{r=0}^{\infty}\alpha_j^{(r)}x^{-r}\qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル形ノ形式的解ガ存在スル場合ニハ

$$(5)\quad y_j=e^{\Lambda(x)}x^{\rho}z_j\qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル置換ヲ行ヘバヨイ.

簡単ノタメ x ガ實軸ニ沿ッテ $+\infty$ ニ近ヅクトキ (2) ガ成立スルモノトスル. $\lambda_j(x)$ ノ實部 $\Re\lambda_j(x)$ ハ x ノ整多項式デアルカラ $\Re\lambda_j(x)$ ハ恒等的ニ 0 トナルカ又ハ x ガ

十分ニ大キイ所デ、キマツタ符号ヲ持ツ。依ツテxガ十分ニ大キイトキ

$$\Re \lambda_j(x) < 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n_1)$$

$$\Re \lambda_j(x) \geqq 0 \qquad (j = n_1+1, \cdots\cdots, n)$$

トスル。結論ヲ先ニ言ヘバ，

「(3) ナル形ニ展開サレル (1) ノ解ハ勝手ナ常数ヲ丁度m個含ム。」

$n_1 > 0$ ナラバソノヤウナ解ハ唯一ツニキマラナイ．ソレヲキメルニハ n_1 個ノ條件ヲ與ヘナケレバナラナイ。最モ簡單ナ條件ノ與ヘ方ハ十分ニ大キナx_0 (>0) ヲ取リ

(6) $\quad y_j(x_0) = y_j^0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n_1)$

トスルノデアル。y_j^0 ハ勝手ニ與ヘラレタ常數デアル。

サテ証明ノ筋道ヲ簡單ニ述ベヨウ。

例ニ依ツテ

$$y_j = \sum_{r=0}^{N-1} \alpha_j^{(r)} x^{-r} + z_j \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ト置キ．$z_1, \cdots\cdots, z_n$ ノ方程式ヲ

(7) $$\frac{dz_j}{dx} = \lambda_j(x) z_j + x^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) z_k + b_j(x)$$

$$(j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ト書ク。存在定理ヲ應用スルニハ $\lambda_j(x) z_j$ ノ項ガ邪魔デアルカラ，更ニ

$$z_j = e^{\Lambda_j(x)} u_j$$

$$(j = 1, 2, \cdots\cdots, n;\ \Lambda_j(x) = \int \lambda_j(x)\, dx)$$

ト置ク。$u_1, \cdots\cdots, u_n$ ノ方程式ハ

$$(8) \quad \frac{du_j}{dx} = \left\{ x^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) e^{\Lambda_k(x)} u_k + b_j(x) \right\} e^{-\Lambda_j(x)}$$

$$(j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

トナル。

$$(9) \quad y_j^0 = \sum_{r=0}^{N-1} \alpha_j^{(r)} x_0^{-r} + z_j^0, \quad z_j^0 = e^{\Lambda_j(x_0)} u_j^0$$

ト置ケバ，條件 (6) ハ

$$(10) \quad u_j(x_0) = u_j^0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n_1)$$

トナル。(3) ナル形ニ展開サレル (1) ノ解ヲ求メルノデアルカラ，コレト

$$(11) \quad u_j = O\left(x^{-N+\rho} e^{-\Lambda_j(x)}\right) \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ヲ滿足スル (8) ノ解ガ唯一ツ存在スルコトヲ證明スレバヨイ。

(ρ ハ N ニ關係シナイ數). ココデ解ノ存在定理ヲ使フノデアルカラ Cauchy ノ問題ニ關スル定理デハナイコトガ分ル、何故カト言ヘバ $j = 1, \cdots\cdots, n_1$ ノ時ニハ x_0 ニ於テ條件ガ與ヘラレテキルノニ $j = n_1 + 1, \cdots\cdots, n$ ノ時ニハ $+\infty$ ニ於テ條件ガ與ヘラレテキルカラデアル。コヽニ於テ一般ニ $x_1, \cdots\cdots, x_n$, $y_1^0, \cdots\cdots, y_n^0$ ガ與ヘラレタ時

$$(12) \quad y_j(x_j) = y_j^0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ナル條件ヲ滿足スル解ノ存在ニ關スル定理ガ特異点ノ研究ニ重要デアルコトガ分ル．現在ノ場合ニハ拙著，常微分方程式論（岩波講座）定理 27 デ十分デアル．コノヤウニシテ前

ニ述ベタ定理ヲ証明スルコトガ出來ル。

次ニ漸近展開 (2) ガ

$$\theta_1 \leqq \arg x \leqq \theta_2$$

デ成立シテヰル場合ヲ考ヘル。$\arg x = \theta$ ナル直線ニ沿ッテ ∞ ニ近ヅク場合ニハ $x = te^{i\theta}$ ト置キ，t ヲ独立変数ニ取レバ前ノ結果ヲ使フコトガ出來ル。$\mathcal{R}\lambda_j(x)$ ニ相當スルモノハ $\mathcal{R}e^{i\theta}\lambda_j(te^{i\theta})$ デアルカラ，ソノ符号ガ問題トナル。

$$\lambda_j(x) \neq 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n')$$

$$\lambda_j(x) \equiv 0 \qquad (j = n'+1, \cdots\cdots, n)$$

トシヨウ. $\lambda_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots\cdots, n')$ ハ x ノ整多項式デアルカラ

$$\lambda_j(x) = \lambda_j^{(0)} x^{m_j} + \cdots\cdots + \lambda_j^{(m_j)} \qquad (\lambda_j^{(0)} \neq 0)$$

ト書クコトガ出來ル。

$$\arg \lambda_j^{(0)} = \omega_j \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n')$$

ト置ケバ t ガ十分ニ大キイトキ $\mathcal{R}e^{i\theta}\lambda_j(te^{i\theta})$ ノ符号ハ $\cos((m_j+1)\theta + \omega_j)$ ノソレト一致スル。故ニ $\cos((m_j+1)\theta + \omega_j)$ $(j = 1, 2, \cdots\cdots, n')$ ノ中ニ 0 ニナルモノガアルヤウナ方向 θ ハ特別ニ注意スル必要ガアル。コレヲ（0 ニ関シテ）特異ナ方向ト呼ブコトニシヨウ。先ヅ $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ ナル範囲ニ特異ナ方向ガ存在シナイ場合ヲ考ヘル。此ノ場合ニ拙著，常微分方程式論（岩波講座）デ採ッタ方法ハ下手デアル。

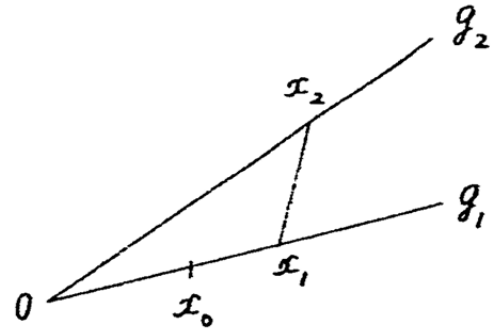
次ノヤウナ方針デ進ム方ガ優レテヰル. $\theta_1 < \theta_2 < \theta_0$ トシ，

θ_0 ヲ θ_2 ニ十分ニ近ク取ッテオケバ $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_0$ ナル範圍ニ特異ナ方向ハ存在シナイ。故ニ $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_0$ デ

$$\cos((m_j+1)\theta+\omega_j)<0 \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n_1)$$

$$\cos((m_j+1)\theta+\omega_j)>0 \qquad (j=n_1+1,\cdots\cdots,n)$$

ト假定スルコトガ出來ル。圖ニ於テ Og_1, Og_2 ハ實軸ト θ_1, θ_2 ナル角ヲナス直線, x_1x_2 ハ實軸ト θ_0 ナル角ヲナス直線デアル。$x_0x_1x_2g_2$ ナル折線ニ沿ッテ微分方程式ヲ積分スル。コノ折線ノ上ノ点ヲ $x=te^{i\theta(t)}$



ト表ハシ, t ヲ独立変数ニ取レバ前ノ結果ヲ利用スルコトガ出來ル。從ッテ (10) 及ビ Og_2 ノ上デ (11) ヲ滿足スル (8) ノ解ガ唯一ツ存在シ $x_0x_1x_2g_2$ ノ上デ

$$|u_j| \leqq K|x^{-N+\rho}e^{-\Lambda_j(x)}| \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ヲ得ル。此ノ解ハ線分 x_1x_2 ノ位置ニ關係シナイ。更ニ K ガ x_1x_2 ニ關係シナイヤウニキマルコトニ注意スレバ漸近展開 (3) ガ $\theta_1 \leqq \arg x \leqq \theta_2$ デ成立スルヤウナ (1) ノ解ガ唯一ツ存在スルコトガ證明サレル。

$\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ ガ特異ナ方向ヲ含ム場合ハ次回ニ譲ッテ, ココデ Trjitzinski ノ方法ニツイテ述ベテ置カウ。Trjitzinski ハ product-integral トカ, iteration トカイフコトヲ使ッテキルガ, ソレハ與ヘラレタ初期條件ヲ滿足スル解ヲ求メル方法デアルカラ Cauchy ノ問題ニ関スル存在定理ヲ使フコトニヨリソノ証明ヲ簡單ニスルコトガ出來ル。

ソレデアルカラ Cauchy ノ問題ニ関スル存在定理ダケデ(3)ナル形ニ展開サレル解ノ存在ガ証明サレルワケデアル。從テ條件(12)ヲ満足スル解ノ存在ニ関スル定理ヲ使ハナイデモヨイコトニナリ，前ニ述ベタコトニ矛盾スルヤウニ見エル。併シ Cauchy ノ問題ニ関スル存在定理ダケデ(3)ナル形ニ展開サレル解ノ存在ガ直接ニ証明サレルノデハナイコトニ注意シナケレバナラナイ。

今 $n_1=0$ ノ場合ヲ考ヘル．コノ場合ニハ條件(6)ガナクナッテシマフカラ，ソノ時ニ使フ定理ハ Cauchy ノ問題ニ関スルモノデアル。故ニソノヤウナ場合ニハ Cauchy ノ問題ニ関スル存在定理ダケデ間ニ合フ。モット一般ニ言ヘバ次ノヤウニナル．例ヘバ実軸ノ上デ

$$\Re\lambda_1(x)\leqq\Re\lambda_2(x)\leqq\cdots\cdots\leqq\Re\lambda_n(x)$$

トスル（番号ヲ適當ニツケレバ何時デモカウスルコトガ出來ル）。(4)ニ於テ $\Lambda'(x)=\lambda_1(x)$ トスル．ソノトキ形式的解(4)ヲ漸近展開トスル解ガ唯一ツ存在スルコトガ Cauchy ノ問題ニ関スル存在定理ヲ應用シテ証明サレル．此ノ解ヲ使ッテ微分方程式ノ階数ヲ一ツ下ゲルコトガ出來ル。ソコデ帰納法ヲ使ヘバ(3)ナル形ニ展開サレル解ノ存在ガ分ルノデアル．コノヤウニ帰納法ヲ使フ必要ヲ生ズルコトニ注意スベキデアル。更ニ特異ナ方向ニツイテ考ヘル必要ガアル。(5)ナル置換ニ依ッテ得ラレル $z_1,\cdots\cdots,z_n$ ニ関スル微分方程式ニ於テ(1)ノ $\lambda_j(x)$ ニ相當スルモノハ $\lambda_j(x)-\lambda(x)$ デアル。変換サレタ方程式ノ 0 ニ関スル特異ナ方向ヲ $\lambda(x)$

ニ関スル (1) ノ特異ナ方向ト呼ブコトニスル。$\lambda(x) \neq 0$ ナラバ $\lambda(x)$ ニ関スル特異ナ方向ト 0 ニ関スル特異ナ方向ト一般ニ一致シナイカラ $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ ガ 0 ニ関スル特異ナ方向ヲ含マナイデモ $\lambda_1(x)$ ニ関スル特異ナ方向ヲ含ムカモ知レナイ。ソノヤウナ $\lambda_1(x)$ ニ對應スル解ヲ使ッテ微分方程式ノ階数ヲ下ゲルノデアルカラ上ニ述ベタ結果ニ達スルダケデモ樂デナイ。コレガ帰納法ヲ使ハナイ方法ノ優レテヰル一ツノ理由デアル。

以上述ベタ所ニヨリ大体想像ガツクト思フガ，Trjitzinski ノヤウニ帰納法ヲ使フト，考ヘテヰル範囲デ $\lambda_1(x)$, ……, $\lambda_n(x)$ ノ間ニキマッタ順序ガツケラレナイト困ル。ソノヤウナ範囲ガ Trjitzinski ノ Regions R デ，ソノ縁ニナル曲線ガ Q curves デアル。モットハッキリ言ヘバ $\mathcal{R}\Lambda_j(x) = \mathcal{R}\Lambda_k(x)$ ニ依ッテ定義サレル曲線ガ Q curve デ，二ツノ Q curves ニ挟マレ，ソノ内部ニ Q curve ヲ含マナイ領域ガ Region R デアル。條件 (12) ヲ満足スル解ノ存在ニ関スル定理ヲ使ヘバコノヤウモノヲ考ヘル必要ガナクナルノデアル。