489. 書信

（溝口幸豊氏ヨリ北川敏男氏へ）

------------------（前略）------------------

Operational Dif. eq.

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \frac{\partial^{n-\nu}\varphi_t}{\partial t^{n-\nu}} = 0$$

ヲ少シ擴張シ、A_ν ガ t ヲ explicit ニ含ムトシマス。

$$\sum A_t^{(\nu)} \frac{\partial^{n-\nu}\varphi_t}{\partial t^{n-\nu}} = 0$$

コンデ、$A_t^{(\nu)}$ $(\nu = 0, \cdots\cdots, n)$ ガアル hypermaximal

Hermitern Operator H ノ函數デアルト假定シマス。

即チ $A_t^{(\nu)}=\int a_\nu(t,\lambda)\,dE(\lambda) \quad (\nu=0,\cdots\cdots,n)$

$\dfrac{\partial \varphi_t}{\partial t}$ ノ意味ヲ次ノヤウニキメマス。

Bochner, Neumann ノヤッタ Integral ノ逆ニキメルノデスガ

$$(\varphi_t, f)=\int(\varphi_t^*, f)\,dt$$

ナル如キ φ_t^* ガ exist シ且ツ (φ_t^*, f) ガ t-continous トナルトキニ

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}=\varphi_t^*$$

トシマス。スルト $\dfrac{\partial \varphi_t}{\partial t}$ ハ unique ニキマリマス。(Bochner Neumann ノ様ニ $I_0^{(\nu)}$ ヲトッテヤッテモ同様デスガ。)

豫備トシテ H ノ resolution or Identity ヲ $E(\lambda)$ トスルト $(E(\lambda)f, f)$ ヲ distribution function トシテ絶体値ノ二乗ガ integrable ノ函数 $F(\lambda)$ ノ凡テヲ取ッテ

$$\int F(\lambda)\,dE(\lambda)f$$

ニヨッテ作ラレル closed linear manifold ヲ $\mathfrak{M}(f)$ トスルト, Hilbert space $\mathfrak{H}$ ハ $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ヲ適當ニトルト,

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{M}(f_1)\oplus\mathfrak{M}(f_2)\oplus\cdots\cdots$$

トナリマス。

次ニ上ノ Operational dif. eq ノ解 φ_t が存在シタ場合ニ φ_t ヲ $\mathfrak{M}(f_1)$, $\mathfrak{M}(f_2)$ ······ ニ project スルト $\mathfrak{M}(f_i)$ ノ中デハ φ_t ハ

$$\varphi_t = \int \varphi(t,\lambda)\, dE(\lambda) f_i \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots$$

ト書キ表ハサレ

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \int \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,\lambda)\, dE(\lambda) f_i \cdots\cdots$$

トナリマス。

Operational dif. eq ハ linear ニシテオキマシタカラ、コノ $\mathfrak{M}(f_i)$ ノ中ノ解ヲシラベテ、ソレ等ヲ加ヘレバヨイノデスカラ $\mathfrak{M}(f) = \mathfrak{H}$ ト考ヘテ進ミマスト $\sum_{\nu=0}^{n} A_t^{(\nu)} \frac{\partial^{n-\nu}\varphi_t}{\partial t^{n-\nu}} = 0$

ハ
$$\sum_{\nu=0}^{n} \int a_\nu(t,\lambda)\, dE(\lambda) \int \frac{\partial^{n-\nu}}{\partial t^{n-\nu}} \varphi(t,\lambda) dE(\lambda) = 0$$

即
$$\sum \int a_\nu(t,\lambda) \frac{\partial^{n-\nu}}{\partial t^{n-\nu}} \varphi(t,\lambda)\, dE(\lambda) = 0$$

前ノ Stone ノ定理ニツイテ考ヘタ様ナヤリ方デ

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t,\lambda) \frac{\partial^{n-\nu}}{\partial t^{n-\nu}} \varphi(t,\lambda) = 0$$

依テ $\varphi(t,\lambda)$ ハコノ微分方程式ノ解トシテキマル譯デ、ソノ解ノ形ハ

$$\varphi_t = \int \varphi(t,\lambda)\, dE(\lambda) f$$

トナルワケデス、逆モ出來マス。

以上 $A_t^{(\nu)}$ ······ が commutative ノ場合ニハ Linear Operational dif. eq ト Linear dif. eq トノ内ニハ完全ノ関係がツク譯デ、何モ微分方程式ト限ラズ適當ナ條件ヲモツ Functional eq ニ付イテモ全ク同様ナルコトハ御説ノ通リデス。

Bochner Neumann ノ場合ニハ

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(\lambda) \frac{\partial^{n-\nu}}{\partial t^{n-\nu}} \varphi(t,\lambda) = b_0 t^{n-1} + b_1 t^{n-2} + \cdots\cdots + b_n$$

ナル微分方程式ノ bounded ノ解ガ

$$\sum_{\nu} \omega_{\nu}(\lambda)\, e^{i\alpha_{\nu}(\lambda)t}$$

ナル形ヲモツ事ヲ証明スル爲ニ多少面倒ナコトキナツタノデ Operational ヲ入レタコトハ問題デハナイモノダロウト思ヒマス。

解ノ形ガ上ノ様ニナツヽトスレバ

$$\| \varphi_t + t_n - \varphi_{t-t_m} \| = \| \varphi_{t_n} - \varphi_{t_m} \|$$

ナリ。Bochner ノ abstract almost function ノ所説デ、スグ

$$\varphi_t = \sum a\, e^{i\nu_n t} \qquad a \in \mathfrak{f}$$

トナリハシマセンデセウカ。

以上大体書イタ所カラ trivial ノ theorem ハ色々ト出テ來マスガ essential ノ考デハ以上ノヤウデス。コレモ亦 Bochner, Neumann ト essential ノ点デハ少シモチガッテ居マセン。（九月二十日）

--------------（後　略）---------------

尚ホコノ前書キマセンデシタガ Operational differential eq. ヲ前通リノ Dif. eq. ニ書キ換ヘタトキノ解ハ H-measurable デアルコトハ F. Riez ノ使ッタ（Acta Sreged 1935）方法ヲチヨット改良シテ使フト証明出來マスカラ、ツケ加ヘテオキマス。Stone ノ定理モ $U_s \varphi_t = \varphi_{t+s}$ ナル形デオキカヘルト解ケルコトハ evident ダロウト思ヒマス。（九月二十九日）