493. 函數展開ノ一形式ト其ノ收斂問題(I)

北川　敏男(阪大)

1. 線狀常微分方程式ノ境界値問題ニ關聯シテ、任意函數ノ展開問題ガ可成リノ程度マデ Birkhoff, Tamarkin, Stone[1] 等ニヨリ論究サレテヰルコトハヨク知ラレタコトデアルガ、最近 J. Delsarte[2] ハコレト稍々趣ヲ異ニシタ函數展開ノ一方式ヲ發表シタ。ソノ方式ガ相當廣汎ナモノデ

---

(1) Birkhoff, Transactions of the American M. S. 9 (1908)
Tamarkin, Math. Ztschr. 27 (1927)
Stone, Transactions of the American M. S. 28 (1926)

(2) J. Delsarte
(i) Sur un principe gévérale de développement des fonctions d'une variable réelle en séries de fonctions entières. C. R. Paris N°8 (18 Février 1935)
(ii) Sur l'application d'un principle gévéral de développement des fonctions d'une variable, aux séries de fonctions de Bessel. C. R. Paris N°13 (25 Mars 1935)
(iii) Sur un procédé de développement des fonctions en séries et sur quelques applications Journ. d. mathém. Tome Quinzième, 1936.

アルコトハ，着目ニ値スルノデアッテ、例ヘバ，應用数學上重要ナ Bessel 函数ノ展開ニツイテミテモ、Bessel-Fourier, Bessel-Dini, Schlömlich 等ノ級数ヲ一望ニ收メテヰル。氏ハコレラノコトヲ示シタノチ、級数ノ收斂ヲ問題トシテ残シテヰル。以下其レニ関シテ若干ノ事柄ヲ報告シタイノデアルガ、一般的ニ解決スルコトハ到底困難デアロウカラ、特殊ノ場合ヲ履ンデ逐次進ンデ行キタイト思フ。

其ノ前ニ、J. Delsarte ノ方法ヲ今少シ拡張シテ置ク必要ガアル。（ソノ理由ハ便宜上 §4 後述ニ譲ル）

コノ問題ノ論究ガ必要ト感ゼラレルニ至ッタノハ，他ノ方面カラデアル。任意函数ノ展開問題ヲ基礎工事ニシテ或ル種ノ線状函数方程式ニ進ンデ行クコト、ソレガ最後ノ目標デアルケレドモ、ソレハ凡ベテ基礎ガ出來テカラノ論題デアル。

2. 規約並ニ假定. 本節ニ於テハ以下使用スル記号並ニ假定ヲ掲ゲル。

〔I〕 *espace* X ノ任意ノ *élément* ヲ x デ表ハス。

〔II〕 (A), (B), (C) ハ夫々 X ノ或ル部分集合デ定義サレタ函數 $f(x)$ ノ或ル *classe linéaire* デアッテ

$$(A) \supset (B) \supset (C)$$

トスル。

〔III〕 *Éléments fondamentaux*: コレハ *espace ancilineare* Λ ノ *élément* λ ニ *paramétrique* ニ *dépend* シ X ノ或ル部分集合デ定義サレタ函

数 $j_\lambda(x)$ ヲ意味スル。

〔IV〕 (A) ニ属スル函数 $j_\lambda(x)$ ハ Λ ニ於イテ一ツノ multiplicité $\mathfrak{M}$ ヲツクル。茲ニ $\mathfrak{M}$ ハ複素平面ノ portion connexe ニ topologiquement équivalent デアル。

〔V〕 $\mathcal{D}f$ ハ (B) ニテ定義サレタ opérateur linéaire デアッテ次ノ如キ propriété spectrale ヲモツ：即チ $\lambda \varepsilon \mathfrak{M}$ ナル限リ

$$\mathcal{D}[j_\lambda(x)] = \varphi(\lambda)\, j_\lambda(x)$$

〔VI〕 Premier principe d'unicité : $\mathfrak{M}$ ニ属スル任意ノ各 λ ニ関シテ

$$\mathcal{D}[f(x)] = \varphi(\lambda) f(x)$$

ナル $f(x) \varepsilon$ (B) ハ必ズ

$$f(x) = k j_\lambda(x) \qquad (k \text{ハ任意ノ常数})$$

〔VII〕 Deuxième principe d'unicité: $f(x) \varepsilon (A)$, 且ツ $\lambda \varepsilon \mathfrak{M}$ ナル限リ

$$\mathcal{D}[g(x)] = \varphi(\lambda)\, g(x) + f(x)$$

ナル如キ $g(x) \varepsilon$ (C) ハ一ツ、而シテ唯一ツ存在スル。コレヲ $\mathcal{L}_\lambda[f(x)]$ デ表ハス。

〔VIII〕 函数系 $\{ j_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n}(x) \}$ ノ導入 之レハ induction ニ依リ次ノ如ク定義スル。

$$1^\circ. \quad \mathcal{L}_{\lambda_2}[j_{\lambda_1}(x)] = \frac{j_{\lambda_2}(x) - j_{\lambda_1}(x)}{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)} \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

$$= \left(\frac{\partial j_\lambda(x)}{\partial \varphi(\lambda)} \right)_{\lambda=\lambda_1} \qquad (\lambda_1 = \lambda_2)$$

ナリト假定シ、コレヲ $j_{\lambda_1,\lambda_2}(x)$ デ表ハス。カクシテ $n=2$ ノトキガ出來タ。

$2°$. 一般ニ、$n-1$ マデスベテノ組 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_{n-1})$ ニツイテ $j_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_{n-1}}(x)$ ガ定義シエタトキ

$$\mathcal{L}_{\lambda_n}[j_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_{n-1}}(x)]$$

$$=\frac{j_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_{n-2},\lambda}(x)-j_{\lambda_1,\cdots\cdots\lambda_{n-2},\lambda_{n-1}}(x)}{\varphi(\lambda_n)-\varphi(\lambda_{n-1})} \qquad (\lambda_n \neq \lambda_{n-1})$$

$$=\left(\frac{\partial j_{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_{n-2}}(x)}{\partial\varphi(\lambda)}\right)_{\lambda=\lambda_n} \qquad (\lambda_n=\lambda_{n-1})$$

ニヨッテ n ノ場合任意ノ $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots\cdots, \lambda_n)$ ニツイテ定義スル。

以下重要ナノハ，$\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots\cdots=\lambda_n=\lambda$ ノ場合デアッテ、コノトキ $j_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots\cdots,\lambda_n}(x)$ ヲ特ニ $j_{\lambda k}(x)$ デ表ハス。

[IX] *Fonctionnelle* δ トコレニ附隨スル正則函數 $\{A_k(\lambda)\}$

Fonctionnelle δ ハ任意ノ $f(x) \in (A)$ ニ對シテ定義サレ，特ニ

$$\delta[j_{\lambda k}(x)]=A_{k-1}(\lambda) \qquad (k=1,2,\cdots\cdots)$$

ト置クトキ $A_k(\lambda)$ ハ $\mathfrak{M}$ ニ於イテ正則デアッテ

$$A_k(\lambda)=\frac{\partial A_{k-1}(\lambda)}{\partial\varphi(\lambda)} \qquad (k=1,2,3,\cdots\cdots)$$

今 $A_0(\lambda)=0$ ノ根ヲ適當ニ順序ヅケタトシテ $\{\lambda_k\}$ デ

表ハストキ

$$A_\nu(\lambda_k) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots, m_k - 1)$$
$$\neq 0 \qquad (\nu = m_k)$$

ナル如キ $\{m_k\}$ ガ對應シテヰルトスル。

3. 展開問題：　§2ノ假定ノモトニ於イテ次ノ如キ對應ガ問題トナル。

I　(A)ニ屬スル任意ノ函數 $f(x)$ ニ對シテ

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{m_k} \alpha_{k,\nu}\, j_{\lambda_k}^{\nu}(x)\right)$$

ナル級數ガ一意ニ對應シ

II. ソノ對應ニ於イテ、特ニ

$$f(x) \equiv \sum_{k=0}^{N}\sum_{\nu=1}^{m_k} \beta_{k,\nu}\, j_{\lambda_k}^{\nu}(x)$$

ナル場合ニハ $\beta_{k,\nu} = \alpha_{k,\nu} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, N)$
$\beta_{k,\nu} = 0 \qquad (k > N)$

トナル。

コノ様ナ對應ガ得ラレナイカ? 答ハ容易デアッテ、今若シ $\varphi(\lambda)$ ガ $\mathfrak{M}_\xi$ デ正則デアルナラバ, $\mathfrak{M}_\xi$ ニ屬スル contour C ヲ適當ニトルコトニヨッテ

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{j_\lambda(x)}{A_0(\lambda)}\,\delta\left\{\mathcal{L}_\lambda\left[f(x)\right]\right\} d\varphi(\lambda)$$

ナル Contour-integral ニヨッテ與ヘラレル。

然ラバ，何等カノ意味デ $f(x)$ ニ收斂スルヤウニ $\{C\}$ ヲ選ビタルタメニハ，如何ナル條件ガ必要ニナルカ或ハ充分

デアルカ？　コレガ吾々ノ問題ナノデアル。

コレニ就イテ次回カラ牛歩ヲ続ケテミタイト思フ。今回ハ若干ノ Remarks ト例ト、§1 ノ終リニ申シ残シタコトトヲ次§4デ述ベノ終リトスル。

4. 例及ビ附言

例1. espace X ヲ区間 $[0, 1]$ ニトリ（A）ヲ $[0, 1]$ デ Lebesgue 積分可能ナル函数ノ全体，（B）ハ $[0, 1]$ デ微分可能ナル函数ノ全体，(C) ハ (B) ニ属シ且ツ $f(0)=0$ ナル如キ $f(x)$ ノ全体ニトル。然ルトキ

$$\mathcal{D}f(x) \equiv \frac{df(x)}{dx}, \quad \varphi(\lambda) \equiv \lambda$$

トスルトキ

$$\mathcal{L}_\lambda[f(x)] = \int_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi$$

$$j_{\lambda\nu}(x) = x^\nu e^{\lambda x}$$

トナルコトが容易ニワカル。Delsarte ハ，$A_0(\lambda)$ ノ零点ニ於イテハ $A_1(\lambda)$（吾々ノ Notation デ）ハ零ニナラヌトシタノデ、$\{j_{\lambda\nu}(x)\}$ ナル classe ニ於イテ $\nu=1$ ノ場合シカ考慮シテヰナイコトニナル。コレデハ、線状可遷作用素ノ場合ノ展開問題が含包サレス。ソノタメニ〔VIII〕—〔IX〕ニ於イテ Delsarte ノ方法ヲ拡張セネバナラナカッタノデアル。

尚、注意スベキハ，カク拡張シタ暁ニハ，線状可遷作用素ノ場合ヨリモ、モット一般ニナッテキルコトデアル。

母函數ト吾々ガ呼ブモノハ，Operateur linéaire $\Gamma f(x)$ ニ於イテ $f(x)=e^{\lambda x}$ ト置イテ、更ニ $x=0$ トシタモノデアル。

$[\Gamma f(x)]_{x=0}$ ハタシカニ、一ツノ fonctionnelle ニハ相違ナイカラ、今ノ方式ニ確カニ含マレテキル、シカモ，Operateur トシテノ Γ ニハ $\Gamma[\mathcal{D}f(x)]=\mathcal{D}[\Gamma f(x)]$（適當ナ $f(x)$ ニ對シテ）ナル條件ガツイテダケ特殊トミナケレバナラナイ。

例2. $\mathcal{D}[f]\equiv\dfrac{d^2f}{dx^2}+\dfrac{2p+1}{x}\dfrac{df}{dx}$ （$R(p)>-1$）

ニ對シテハ $\varphi(\lambda)=-\lambda^2$ ニトルトキ

$$f_\lambda(x)=\frac{2^p p!}{(\lambda x)^p}J_p(\lambda x)$$

トナルコトハ J. Delsarte [3] ニ示サレテキル。コノ場合ニモ、吾々ノ $f_{\lambda\nu}(x)$ ハ極メテ簡單ニ計算サレル、ソレハ p ヨリモ次數ノ整數値ダケ高イ Bessel 函數カラ得ラレルコトガワカル。（委シクハ次ニ譲ル）