509. 積分方程式ノ近似解法(II)

亀田豊治朗(簡易保険局)

第三節 近似解

積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ヲ近似的ニ解クニハ次ノ順序ニヨルコトガ出來ル。

1) 區域 $(a \leqq x \leqq b,\ \ a \leqq t \leqq b)$ ニ於テ

$|K(x,t)-K_0(x,t)|$ ガ與ヘラレタ數 ε ヨリモ小サイ

bilinear kernel $K_0(x,t)$ ヲ見出ス。

之レハ Fourier series デモ出來レバ、又 $K(x,t)$ ヲ Legendre ノ polynomial デ展開シテモ出來ル。

$|K(x,t)-K_0(x,t)|$ ガ ε ヨリ小サイト云フ條件ハ區域ノ一小部分(例ヘバ或ル直線ノ近所)デ滿足サレナイ場合デモ $K(x,t)$ ガ有限ナラバ本方法ニ依ルコトガ出來ル。

2) $K_0(x,t)$ ニ對スル a_{ij} ヲ計算スル。

3) $$D = \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

及ビ其ノ餘因子 A'_{ij} ヲ計算スル。

4) 3) デ求メタ A'_{ij} ノ行ト列トヲ入レ替ヘテ

$$(a^*_{ij}) = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{A'_{11}}{D} & -\dfrac{A'_{12}}{D} & \cdots\cdots \\ -\dfrac{A'_{21}}{D} & 1-\dfrac{A'_{22}}{D} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

ヲ算出スル。

5) $$\int_a^b \varphi_i(\xi) f(\xi)\, d\xi, \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots n$$

ヲ算出スル。

6) $$u(x) = f(x) - \left(\sum_j a^*_{1j} \int_a^b \varphi_j(\xi) f(\xi)\, d\xi\right) \varphi_1(x)$$
$$- \left(\sum_j a^*_{2j} \int_a^b \varphi_j(\xi) f(\xi)\, d\xi\right) \varphi_2(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- \left(\sum_j a^*_{nj} \int_a^b \varphi_j(\xi) f(\xi)\, d\xi\right) \varphi_n(x)$$

上述ノ方法デ一ツノ近似解（u_0 トス）ガ得ラレタトキ之ヲ用ヰテ，多クノ場合ニ，更ニ一層眞ニ近イ解ヲ得ル方法

ガアル。大体ノ考ハ $K-K_0$ ノ絶對値ハ小サイノデアルカラ之ニ或ル函数ヲ乘ジタモノヲ kernel トスル積分方程式ヲ作リ uヲ successive substitution ノ方法デ收斂ノ速ナ級數ニ展開スルノデアルガ、先ヅ其ノ計算ヲ symbolical ニ示セバ次ノ如クデアル。

$$u=f+Ku, \qquad u_0=f+K_0u_0$$

ヨリ

$$u-u_0=Ku-K_0u_0$$

$$u_0(1-K_0)=u(1-K)$$

$$u_0=u\frac{1-K}{1-K_0}=u-\frac{K-K_0}{1-K_0}u$$

然ルニ (9) 式ヨリ

$$(1-K_0)(1-K_0^*)=1$$

デアルカラ

$$u=u_0+(1-K_0^*)(K-K_0)u$$

今 $(1-K_0^*)(K-K_0)$ ニ相當スル Kernel ヲ K_1 ト書ケバ K_1 ノ絶對値ハ多クノ場合小サイノデアルカラ

$$u=u_0+K_1u_0+K_1^2u_0+\cdots\cdots$$

ト云フ收斂ノ速イ級数デ求メラレル。

之レヨリ正式ニ上記ノ核 K_1 ヲ求メル。

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt \tag{1}$$

ヨリ
$$u_0(x)=f(x)+\int_a^b K_0(x,t)\,u_0(t)\,dt \tag{10}$$

ヲ辺々相減ズレバ

$$u(x)-u_0(x)=\int_a^b K(x,t)u(t)dt-\int_a^b K_0(x,t)u_0(t)dt \qquad (11)$$

(11) ノ x ノ代リニ ξ ト書キ $K_0^*(x,\xi)$ ヲ乗ジテ ξ ニ就キ積分スレバ

$$\int_a^b K_0^*(x,\xi)u(\xi)d\xi-\int_a^b K_0^*(x,\xi)u_0(\xi)d\xi$$

$$=\int_a^b\int_a^b K_0^*(x,\xi)K(\xi,t)u(t)\,d\xi\,dt$$

$$-\int_a^b\int_a^b K_0^*(x,\xi)K_0(\xi,t)u_0(t)\,d\xi\,dt \qquad (12)$$

サテ (9) 式ノ両辺ニ $u(t)-u_0(t)$ ヲ乗ジ t ニツキ積分スレバ

$$\int_a^b\int_a^b K_0^*(x,\xi)K_0(\xi,t)u(t)\,d\xi\,dt-\int_a^b\int_a^b K_0^*(x,\xi)K_0(\xi,t)u_0(t)\,d\xi\,dt$$

$$=\int_a^b K_0(x,t)u(t)dt-\int_a^b K_0(x,t)u_0(t)dt$$

$$+\int_a^b K_0^*(x,t)u(t)dt-\int_a^b K_0^*(x,t)u_0(t)dt \qquad (13)$$

(12) ニ (13) ヲ加ヘタルモノヲ (11) ヨリ減ジテ変化スレバ

$$u(x)=u_0(x)+\int_a^b\left[K(x,t)-K_0(x,t)\right]u(t)dt$$

$$-\int_a^b\int_a^b K_0^*(x,\xi)\left[K(\xi,t)-K_0(\xi,t)\right]u(t)\,d\xi\,dt \qquad (14)$$

ヲ得ル、故ニ

$$K_1(x,t)=K(x,t)-K_0(x,t)-\int_a^b K^*(x,\xi)\left[K(\xi,t)-K_0(\xi,t)\right]d\xi \qquad (15)$$

之ヲ定理デ表ハセバ

定理6. 積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K_0(x,t)\,u(t)\,dt$$

ノ解ヲ u_0 トスレバ積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt$$

ノ解ハ次ノ方程式ヲ満足スル。

$$u(x)=u_0(x)+\int_a^b K_1(x,t)\,u(t)\,dt$$

但シ

$$K_1(x,t)=K(x,t)-K_0(x,t)-\int_a^b K_0^*(x,\xi)\big(K(\xi,t)-K_0(\xi,t)\big)d\xi$$

デアッテ、$K^*(x,t)$ ハ $K_0(x,t)$ ノ *reciprocal kernel* デアル。

(注意) 本定理ノ証明ニハ $K_0(x,t)$ ガ *bilinear kernel* デアルコトヲ用キテ居ナイカラ、任意ノ近似核デヨイ。故ニ *Volterra* ノ方程式デ $|K-K_0|$ ガ小サイ場合ニ K_0 ノ *reciprocal kernel* K_0^* ガ判ッテ居リ且ツ之ガ大キクナイナラバ本定理ニヨリ速ニ収斂スル級数デ解ヲ計算スルコトガ出来ル。

第四節　計　算

本節ニハ計算例ト計算ニ必要ナ資料トヲ掲ゲル。

1. $n=1$ ノ場合、即チ

$$u(x)=f(x)+\int_a^b a_{11}\varphi_1(x)\varphi(t)\,dt$$

ノ解ハ (6) 式ニヨリ

$$u(x)=f(x)+\frac{a_{11}}{1-a_{11}}\varphi_1(x)\int_a^b\varphi_1(t)f(t)\,dt$$

デアル。

2. $n=2$ ノ場合ニ於ケル

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{ij}a_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(t)\,dt$$

ノ解ハ定理 2 ヨリ

$$u(x)=f(x)-\int_a^b\sum a^*_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(t)\,dt$$

デアルガ a^*_{ij} ノ値ハ

$$(a^*_{ij})=\begin{pmatrix}\lambda\dfrac{-a_{11}+\lambda(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}{D(\lambda)} & \lambda\dfrac{a_{12}}{D(\lambda)}\\[2ex] \lambda\dfrac{a_{21}}{D(\lambda)} & \lambda\dfrac{-a_{22}+\lambda(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}{D(\lambda)}\end{pmatrix}$$

但シ $D(\lambda)=1-\lambda(a_{11}+a_{22})+\lambda^2(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$ デアル。

3. polynomial ノ核ニヨリ近似解ヲ算出スル場合ニハ先ヅ変数ヲ適當ニ変更シテ限界 a, b ガ夫々 $-1, 1$ トナルヤウニシ、然ル後 normalized Legendre's polynomial デ核ヲ表ハス場合ガ多イト思ハレルカラ、此ノ

場合ノ式ヲ下ニ掲ゲル。

Legendre's polynomial	normal orthogonal function	x^n ヲ $\varphi_i(x)$ ニテ表ハセルモノ
$P_0(x)=1$	$\varphi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1=\sqrt{2}\,\varphi_1(x)$
$P_1(x)=x$	$\varphi_2(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,x$	$x=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\varphi_2(x)$
$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$	$\varphi_3(x)=\sqrt{\frac{5}{2}}\,P_2(x)$	$x^2=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varphi_3(x)+\frac{\sqrt{2}}{3}\varphi_1(x)$
$P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$	$\varphi_4(x)=\sqrt{\frac{7}{2}}\,P_3(x)$	$x^3=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}\,\varphi_4(x)+\frac{\sqrt{6}}{5}\varphi_2(x)$
$P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}$	$\varphi_5(x)=\sqrt{\frac{9}{2}}\,P_4(x)$	$x^4=\frac{8}{35}\frac{\sqrt{2}}{3}\varphi_5(x)+\frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{5}}\varphi_3(x)+\frac{\sqrt{2}}{5}\varphi_1(x)$

4. 計算例トシテ定理２ニヨリ次ノ方程式ヲ解ク。

$$u(x)=1+\int_{-1}^{1}\cos xt\,u(t)\,dt$$

$K_0(x,t)$ トシテ $1-\frac{x^2t^2}{2}+\frac{x^4t^4}{24}$ ヲ取レバ

$$|K-K_0|<\frac{1}{720}$$

デアルカラ定理２ノミデモ相當精密ナ近似解ガ得ラレル。

$K_0(x,t)$ ハ前掲ノ φ_1, φ_3, φ_5 デ表ハスコトガ出來ル、其ノ係數 a_{ij} 及ビ之レヨリ計算シタ諸數ヲ表示スレバ次ノ通リデアル。

	a_{ij}			a'_{ij}			A'_{ij}		
$i \backslash j$	1	3	5	1	3	5	1	3	5
1	1.892222	-.095122	.001270	-.892222	.095122	-.001270	1.082920	-.095074	.001222
3	-0.95122	-.083447	.001623	.095122	1.083447	-.001623	-.095074	-.891992	-.001569
5	.001270	.001623	.000484	-.001270	-.001623	.999516	.001222	-.001569	-.995723

而シテ　$D = |a'_{ij}| = -.975251$

デアルカラ，$\dfrac{A'_{ij}}{D}$ 及ビ $\overset{*}{a}_{ij}$ ハ次表ノ通リデアル。

	$\dfrac{A'_{ij}}{D}$			$\overset{*}{a}_{ij}$		
$i \backslash j$	1	3	5	1	3	5
1	-1.110401	.097487	-.001253	2.110401	-.097487	.001253
3	.097487	.914423	.001609	-.097487	.085577	-.001609
5	-.001253	.001609	1.000484	.001253	-.001609	-.000484

故ニ

$$u_0(x) = f(x) - \int_{-1}^{1} \sum_{ij} \overset{*}{a}_{ij}\, \varphi_i(x)\, \varphi_j(t) f\, dt$$

$$= 1 - \int_{-1}^{1} \left(2.110401 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dt$$

$$- \int_{-1}^{1} (-.097487) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) dt$$

$$- \int_{-1}^{1} .001253 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} \left(\frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}\right) dt$$

$$= -1.221 + .341x^2 - .016x^4$$

デアル。