521. Kompaktum ノ Wegegruppe ノ 定義ニ就イテ

小 松 醇 郎（阪大）

Kompaktum ノ Bettische Gruppe ノ定義ハ色々ナ方法が可能デアル。先ヅ Brouwer[1] ヨリ出発スル "Zyklosis" ノ方法, Vietoris[2] ノ Vollzyklus ノ方法, 又 Alesandroff, Pontrjagin[3] ノ Projektionszyklus ノ方法等デアル。

Zyklosis ニ依ル群ハ Vietoris, Pontrjagin ノ定義ニ依ル群ト isomorph トハ限ラナイ。シカシ Vietoris ノ方法ト Pontrjagin ノ方法トデハ isomorph ノ群が得ラレ且ツソノ群ヲ Vietoris

---

1) Brouwer, L. E. J.; Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve. Math. Ann. 72. (1912)

2) Vietoris, L.; Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von Zusammenhangstreuen Abbildungen. Math. Ann. 97. (1927).

3). Pontrjagin, L.; Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze. Math. Ann. 105. (1931)

Pontrjagin[1] 夫々ノ意味デ topologische Gruppe ニスレバ stetig isomorph デアル。コノ証明ヲ明確ニ書イタノハ小生未ダ読ンダコトハナイガソノ事實ヲ書イタノハ Chevalley[2], Freudenthal[3] デアル。

Fundamentalgruppe ニ就イテ同様ナ關係ヲ求メテ見タ。

Vietoris ノ Vollweg: $W=(W_1^{\delta_1}, W_2^{\delta_2}, \text{------}, W_n^{\delta_n}, \text{------})$, 茲ニ $W_i^{\delta_i}$ ハ Zusammenhängend ナ Kompaktum R ニ頂点ヲ持ツ "abstrakter Weg" デアッテ各線分ノ diameter $< \delta_i$ ($\delta_i \geqq \delta_{i+1}$, $\lim \delta_i \to 0$) ナルモノ，且ツ尚條件トシテ正數列 η_i ($\eta_i \geqq \eta_{i+1}$, $\eta_i \geqq \delta_i$, $\lim \eta_i \to 0$) ニ對シテ $W_i^{\delta_i}$ ト $W_{i+1}^{\delta_{i+1}}$ トハ η_i homotop デアル。

二ツノ Vollweg W, W' ガ homotop トハ各々ノ適

---

1) Pontrjagin, L.; The general topological theorem of duality for closed sets. Ann of Math. 35 (1934)

2) Chevalley, C.; Sur la définition des groupes de Betti des ensembles fermés. C.R. 200 (1935)

3) Freudenthal, H.; Die Rn-adische Entwicklung von Räumen und Gruppen. Proc. Acad. Amsterdam 38 (1935)

當ナ Teilfolge ヲトレバ $w_{ie}^{\delta_{ie}}$ ト $w'^{\,\delta'_{je}}_{je}$ トハ互ヒニ ε_e homotop ($\lim \varepsilon_e \to 0$) トナルトキデアル。

又 W, W′ ノ Komposition ハ, w_n, w'_n ハ勿論 R ノ一点 x_0 ヲ始メト終リニ取ルモノトスルカラ普通ノ Komposition $w_n w'_n$ ヲ Element トスル Folge, 且ツ $\delta_n \geq \delta'_n$ トスレバ

$$WW' = \left((w_1 w'_1)_1^{\delta_1}, \text{------}, (w_n w'_n)^{\delta_n}, \text{--------} \right).$$

是デ Wegegruppe $\mathfrak{G}$ ヲ定義スル。

次ニ Alexandroff, Pontrjagin 式ノ Fundamentalgruppe ノ定義ハ R ノ Alexandroff ノ意味ニ於ケル Nervenfolge[1)]

$$N_1, N_2, \text{------}, N_n, \text{------}$$

ヲトル、N_n ハ N_m $(n > m)$ ニ Simpliziale Abbildung (auf) $\mathfrak{g}_m^n$ ガ定義サレテ居ル、R ノ点 x_0 ヲ approximate スル Simplexenfolge ヲ $x_0 = (T_1, T_2, \text{----------})$

$$\mathfrak{g}_m^n(T_n) = T_m$$

トスル, N_i デ T_i ノ對應スル ($\mathfrak{g}$ デ) 頂点ヲ起点トスル Fundamentalgruppe ヲ $\mathfrak{F}_i$ トスレバ $\mathfrak{g}_m^n$ ニヨツテ $\mathfrak{F}_n$, $\mathfrak{F}_m$ ヘノ Homomorphe Abbildung (in) ヲ得ル。

---

1) Alexandroff, P.; Untersuchungen über Gestalt und Lage Abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension. Ann. of Math. 30. (1928)

$\varphi^n_m(\mathfrak{F}_n) \subset \mathfrak{F}_m$. 此ノ群ノ Folge ガ定義スル Limesgruppe[1] $\mathfrak{F}$ ガ R ノ Fundamentalgruppe.

定理. 上ノ二ツノ群ハ isomorph.

証明. $\mathfrak{G}$ ノ $\mathfrak{F}$ ヘノ homomorph ナ関係ヲ求メソレガ isomorph デアリ且ツ $\mathfrak{F}$ 全体ヘ変換サレルコトヲ証明スル。

1) 任意ノ Vollweg $W = (w_1^{\delta_1}, \cdots\cdots, w_n^{\delta_n}, \cdots\cdots)$ ヲトル. $2\eta_{i_1}$ ヲ適當ニトレバ Nerv N_1 ヲ定義スル Überdeckung $\mathcal{R}_1$ ノ Lebesguesche Zahl σ_1 ヨリ小ニナル。同様ニ $2\eta_{i_2}$ ($i_2 > i_1$) ニ適當ニトレバ Überdeckung $\mathcal{R}_2$ ノ Lebesguesche Zahl σ_2 ヨリ小ニナル. Vollweg W ノ代リニ $\overline{W} = (w_{i_1}^{\delta_{i_1}}, w_{i_2}^{\delta_{i_2}} \cdots\cdots, w_{i_n}^{\delta_{i_n}}, \cdots\cdots)$ ヲ使フ。

$w_{i_n}^{\delta_{i_n}}$ ノ頂点 y ヲ含ム Element ($\mathcal{R}_n$ ノ) ニ對應スル N_n ノ頂点 x トスレバ $y \to x$ ノ對應ハ η_{i_n} ノ假定ニヨリ simpliziale Abb. f_n。

又 $w_{i_n}^{\delta_{i_n}}$ ト $w_{i_{n+1}}^{\delta_{i_{n+1}}}$ トノ Homotopie ヲ定義スル二次元 Komplex $Q_{i_n}^{\eta_{i_n}}$ ヲ同様ニ N_n ニ Simpliziale Abbildung f_n スル. N_n デハ

故ニ $f_n(w_{i_n}^{\delta_{i_n}})$ ト $f_n(w_{i_{n+1}}^{\delta_{i_{n+1}}})$ トハ $\mathfrak{F}_n$ ノ等シイ element ヲ

---

1) Freudenthal, H.; Die Hopfsche Gruppe, eine topologische Begründung kombinatorischer Begriffe. Comp. math. 2. (1935) u. Chevalley, C.

表ス.

又 $f_n(W_{i_{n+1}}^{\delta_{i_{n+1}}})$ ト $\varphi_n^{n+1} f_{n+1}(W_{i_{n+1}}^{\delta_{i_{n+1}}})$ トハ N_n デ homotop.

ソレ故 Folge

$$\left(f_1(W_{i_1}^{\delta_{i_1}}),\ f_2(W_{i_2}^{\delta_{i_2}}), \cdots\cdots, f_n(W_{i_n}^{\delta_{i_n}}), \cdots\cdots\right)$$

ハ $\mathfrak{F}$ ノ一ツノ元 Element ヲ表ハス. W ト $\overline{W}$ トハ $\mathfrak{G}$ ノ同一ノ元デアツタカラ是デ $\mathfrak{G}$ ノ $\mathfrak{F}$ ヘノ Homomorphe Abbildung ヲ得タ. Homomorph ナルコトハ殆ンド trivial.

2) 上ノ對應ガ $\mathfrak{F}$ ノ全体ヘ変換サレルコトハ $\mathfrak{F}$ ノ任意ノ元

$$a = (a_1,\ a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots)$$

ヲトリソレノ各々ヲ表ハス N_i ノ上デノ weg ヲ

$$(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n, \cdots\cdots)$$

トスル。Simpliziale Abbildung $\varphi_{n-1}^{n}(N_n) = N_{n-1}$ デ $\varphi_{n-1}^{n}(z_n)$ ハ z_{n-1} ト homotop デアル。

扨テ z_i ハ $\mathfrak{Z}_i$ ガ irreduzible ナ $\frac{1}{2}\zeta_i$ Überdeckung トスレバ z_i ハ ζ_i-weg. 又 z_i ト $\varphi_{i-1}^{i}(z_i)$ トハ ζ_{i-1}-homotop デアル. $\varphi_{i-1}^{i}(z_i)$ ト z_{i-1} トハ ζ_{i-1}-homotop. 故ニ z_i ト z_{i-1} トハ ζ_{i-1}-homotop.

故ニ Folge

$$\left(z_1^{\zeta_1},\ z_2^{\zeta_2}, \cdots\cdots, z_n^{\zeta_n}, \cdots\cdots\right)$$

ハ一ツノ Vollweg デ $\mathfrak{G}$ ノ元ヲ表ハス。此ノ Vollweg ヲ

1) ノ對應デ，始メノ $\mathfrak{F}$ ノ元 a ニ変換サレル。

3) 1) ノ對應ガ Isomorph ナルコトハ $\mathfrak{F}$ ノ單位元 e ニ変換サレルニツノ Vollweg (1) ノ δ_{i}, ノ代リニ δ, トシテオク)。

$$W=(w_1^{\delta_1}, w_2^{\delta_2}, \cdots\cdots, w_n^{\delta_n}\cdots\cdots)$$

$$W'=(w_1'^{\delta_1}, w_2'^{\delta_2}, \cdots\cdots, w_n'^{\delta_n}, \cdots\cdots)$$

ヲトル。故ニ δ, η ハ同一ノ Folge ヲトツテ差支ヘナイ。[1]

1) デ $W_n^{\delta_n}$, $w_n'^{\delta_n}$ ハ $f_n(W_n^{\delta_n})$, $f_n(w_n'^{\delta_n})$ ニ移ルガ是ハ 2) ヨリ又夫々 Vollweg ヲ定義スル。

$$f(w)=(f_1(w_1^{\delta_1}), f_2(w_2^{\delta_2}), \cdots\cdots, f_n(w_n^{\delta_n}), \cdots\cdots),$$

$$f(w')=(f_1(w_1'^{\delta_1}), f_2(w_2'^{\delta_2}), \cdots\cdots, f_n(w_n'^{\delta_n}), \cdots\cdots).$$

$f(w)$, $f(w')$ ハ然シ $\mathfrak{F}$ ノ單位元，故ニ 2) ヨリ $f_n(w_n^{\delta_n})$ ト $f_n(w_n'^{\delta_n})$ トハ ζ_i-homotop. 又 $w_n^{\delta_n}$ ト $f_n(w_n^{\delta_n})$ トハ ζ_i-homotop.

故ニ w ト w' トハ homotop. 定義ニ於ケル（始メノ Homotopie ノ）正數列 ε_n ハ ζ_n ヲトレバヨイ。即チ $\mathfrak{F}$ ノ單位元ニ変換サレルノハ $\mathfrak{G}$ ノ唯一ツノ元，從ツテ單位元ノミ。故ニ Isomorph ノ對應。

---

1) *Borsuk, K.; Un théorème sur les groupes de Betti des ensembles localement connexes en toutes les dimensions n. Fund. Math. 24 (1934).*

系. Nerv ニ依ル Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ ハ überdeckungsfolge ノ取リ方ニ拘ラズ常ニ Isomorph デアル。

系. Kompaktum R ガ一次ノ ordnung マデ locally zusammenhängend ナラバ Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}_i$ ハ或ル所カラ先キ, 即チ適當ナ i_0 ニ對シ j, $i \geqq i_0$ デ $\mathfrak{F}_i$ ハ $\mathfrak{F}_j$ ト isomorph デアル。