

## 522. 非同次型線状移動可能函数方程式 ニ就イテ (IV)

北川 敏男 (阪大)

1.  $\Gamma$  がソノ母函数  $G(\lambda)$  = 関シテ或ル種ノ條件ヲ充ス *linear translatable operator* デアリ、與ヘラレタ函数  $g(x)$  が *infinity* = 於ケル *behavior* = ツキ若干ノ制限ノモトニアルトキ、函数方程式

$$(I) \quad \Gamma_{\infty} f(t) = g(x)$$

ノ解  $f(x)$  ノウチニ、特ニ主解ト稱サレル解が存在スル。ココデハ、(II) (問題, 96号, 436番参照) ノ所論ニ就イテ *Schmidt* ノ函数  $\tilde{N}_A(x, f; P)$  ヲ *modify* スルコトニヨリ主解ト一致スル解ヲ得ラレルコトヲ示サユ。

2. 今、 $g(x)$  ハ  $m$  回連続微分可能デアツテ

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} q^{(m)}(x) = 0$$

ナリトスル。然レトキ Wiener, operational calculus  
ニ於ケルガ如ク

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ. \quad \varphi_A(u) = 1 \quad |u| < A = \tau \\ 2^\circ. \quad \varphi_A(u) = 0 \quad |u| \geq A + \delta = \tau \\ 3^\circ. \quad A \leq |u| \leq A + \delta = \tau \text{ 無限回微分可能ニシテ} \\ \quad \text{スベテノ自然数ニ對シテ} \\ \varphi_A^{(n)}(A) = \varphi_A^{(n)}(-A) = \varphi_A^{(n)}(A + \delta) = \varphi_A^{(n)}(-A - \delta) = 0 \end{array} \right.$$

ニヨリ到ル處連続ナ函数  $\varphi_A(u)$  ヲ定義スル。(Aハアトデ  
便宜的ニ選ベル常数デアアル)、ソコデ  $\alpha < 0 < \beta$  トシテ

$$(4) \quad g_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{(\beta+iu)(\xi-x)} \varphi_A(u) du \right\} d\xi \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{(\alpha+iu)(\xi-x)} \varphi_A(u) du \right\} d\xi$$

ト置ク、コレノ存在ハ(2)カラ

$$(5) |g(x)| < M(1+|x|^m)$$

ナル如キ M ノ存在ヲ示シテルカラ明ラカ。α, β ノ選ビ方  
ハアトデ述ベル。更ニ  $g_1(x)$  ハ無限回微分可能ナルコトガ容  
易ニワカル。

3.  $\Gamma$  ノ母函数  $G(\lambda)$  ヲ整函数トシ原点ハ  $\nu$  次ノ零点  
ナリトスル。即チ  $G^{(\nu)}(0) = 0$  ( $0 \leq \nu \leq \nu-1$ ),  $G^{(\nu)}(0) \neq 0$ .  
トオク ( $\nu \geq 0$ デアアル)

更ニ、零ニ最ニ近い  $G(\lambda)$  ノ零点 ( $\neq 0$ ) ノ半径ハ 1 ヨリ小ナ

ラズトスル。コレヲノコトハ  $Q(\lambda)$  = 関スル何等本質的ナ制限デナイ。

茲ニ於テ generalised Bernoulli's polynomials  $B_\nu^k(x)$  ヲ次ノ展開式ノ係数ニヨリ定義スル:

$$(6) \quad \frac{\lambda^k e^{\lambda x}}{Q(\lambda)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu B_\nu^k(x)$$

然ルトキ、(6)ノ收斂半径ハ1ヨリ大デアラフ。

今

$$(7) \quad \text{Max}(\sqrt{|\beta|^2 + |A + \delta|^2}, \sqrt{|\alpha|^2 + |A + \delta|^2}) \leq \eta < 1$$

ナル様ニ  $A, \delta, \beta, \alpha$  ヲ選ソグオクト。(ソレハ常ニ可能デアラフ)

(4)カラシテ

$$(8) \quad |g_\nu^{(w)}(x)| < N \eta^\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

ナル如キ常数  $N$  ガアラフ。依ツテ ( $B_\nu^k(0) = B_\nu^k$  トオイテ)

$$(9) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^k g_\nu^{(w)}(x)$$

ハ任意ノ有限区間ノ  $x$  = 関シテ、一樣且ツ絶對的ニ收斂スル。

依ツテ積ルト summation ノ順序交換ガ許サレテ

$$(10) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^k g_\nu^{(w)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\beta + iu)^k}{Q(-\beta + iu)} e^{(\beta + iu)(\xi - x)} \mathcal{P}_A(u) du \right\} d\xi$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\alpha + iu)^k}{Q(-\alpha + iu)} e^{(\alpha + iu)(\xi - x)} \mathcal{P}_A(u) du \right\} d\xi$$

(10)ノ両辺 =  $I'$  ヲ施ス。然ルトキ、(5) = 依ツテ、右辺

デ、二度  $I'$  ト integrations トノ順序交換ガ許サレテ

$$(11) \quad \Gamma \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} g_1^{(\nu)}(x) \right\} = \int_0^{\infty} g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (-\beta + iu) e^{(\beta + iu)(\xi - x)} g_A(u) du \right\} d\xi \\ + \int_{-\infty}^0 g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (-\alpha + iu) e^{(\alpha + iu)(\xi - x)} g_A(u) du \right\} d\xi$$

(11)・右辺ハ  $g_1^{(R)}(x)$  = 等シイ。依ツテ (10) ナル函数ハ

$$(12) \quad \Gamma_1 f(x) = g_1^{(R)}(x)$$

ノ解ヲ與ヘルコトヲ知ツタ。

4. 次ニ

$$g(x) - g_1(x) = g_2(x)$$

トオキ

$$(13) \quad \Gamma f(x) = g_2(x)$$

ノ解ヲ求メル。

$g_2(x)$  ハ明ラカニ (II) ノ假定 I (96 号 p. 11) ヲ充ツ  
テキルカラ、今ソコノ假定 {II} が  $P(\lambda) \equiv 1$  = 對シテ充テ  
テキルトスルト (II) ノ定理 1 = 依ツテ

$$(14) \quad \lim_{B \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} g_2(t) \left\{ \int_{-B}^B \frac{e^{(\beta + i\nu)(x-t)}}{Q(\beta + i\nu)} d\nu \right\} dt \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 g_2(t) \left\{ \int_{-B}^B \frac{e^{(\alpha + i\nu)(x-t)}}{Q(\alpha + i\nu)} d\nu \right\} dt \right\}$$

ガ解ヲ與ヘル。吾々ハ (14) ヲ調べテミヤウ。以下コレヲ  $f_2(x)$   
トオクコトニスル。