523. Quermassintegral ノ確率的意義

栗田　稔（東大學生）

n次元 Euklid 空間 E_n 内ノ r次元線狀空間 E_r ハソレニ含マレル任意ノ点 $\mathfrak{u}$ 及ビ之レヲトホル r個ノ Vektor ノ正規直交系

$$(\mathrm{U})\quad \mathfrak{v}^{(1)} \text{-------} \mathfrak{v}^{(r)}$$

ニヨッテ決定サレル。更ニ $n-r=s$個ノ Vektor

$$(\mathrm{V})\quad \mathfrak{w}^{(1)} \text{-------} \mathfrak{w}^{(s)}$$

ヲトリ (U), (V) ガ E_n ノ完全正規直交系ナル樣ニスル。

サテ Differential ハスベテ・ヲモッテアラハシ，又 Differential ノ積ハスベテ alternierend 即チ $\dot{a}\dot{b}=-\dot{b}\dot{a}$，$\dot{a}\dot{a}=0$ トスルトキ，r次元平面 E_r ノ E_n 内デノ Dichte ハ

$$G_r = \prod_{j=1,\cdots s} \nu^j \prod_{\substack{i=1,\cdots r\\ k=1,\cdots s}} p^{ik}$$

コヽニ　$\nu^j=(\mathfrak{w}^{(j)}, \dot{\mathfrak{u}})$　$p^{ik}=(\dot{\mathfrak{v}}^{(i)}, \mathfrak{w}^{(k)})$

（以上 W. Blaschke Integralgeometrie I Actualités scientifique 252 s.12ヨリ）

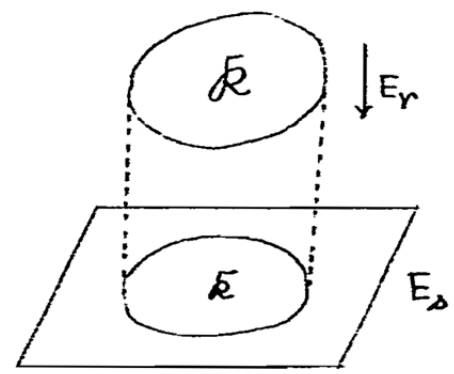
ソレデ E_n 内ニ konvexer Körper K ガアルトキ之レヲキル E_r ノ Anzahl (Mass) ヲ M_r トスルトキハ

$$M_r = \int_{KE_r\neq 0} G_r = \int_{KE_r\neq 0} \prod \nu^j \prod p^{ik}$$

之レヲ計算スルノニ先ヅ $\mathfrak{v}^{(1)}$ ------- $\mathfrak{v}^{(r)}$
$\mathfrak{w}^{(1)}$ ------- $\mathfrak{w}^{(s)}$ ヲ固定シテ $\mathfrak{v}$ ノミニツイテノ積分

$$m=\int \Pi \nu^{j}$$

ヲ考ヘル。コノトキ積分範囲ハ（∇）ノ定メル s 次元平面 E_s 上ヘノ $\mathfrak{K}$ ノ正射影ニ他ナラナイ。コノ正射影ヲ $\mathfrak{k}$ トスル



トキ $\mathfrak{k}$ ガ E_s 上ノ konvexer Körper デアルコトハ明ラカデアル。
サテ $\Pi\nu^{j}$ ハ Drehung ニ對シテ不變（上記 Blaschke I, S.13）デアルカラ適當ニ施シテ

$$\mathfrak{w}^{(1)}=(1,0,\cdots\cdots 0)$$

$$\mathfrak{w}^{(2)}=(0,1,0,\cdots\cdots)\ \text{-------}\ \mathfrak{w}^{(s)}=(0,\ \text{-------}\ 0,\underset{s\text{番目}}{1},0,\ \text{-------}\ 0)$$

トスルトキ $\nu^{j}=\dot{x}_j$ トナリ

$$\Pi \nu^{j}=\dot{x}_1\ \text{-------}\ \dot{x}_s$$

從ツテ $m=\int \dot{x}_1\ \text{------}\ \dot{x}_s=\mathfrak{k}$ ノ s 次元ノ体積

之レヲ $\sigma(\mathfrak{v}^{(1)}\ \text{-------}\ \mathfrak{v}^{(r)})$ トカクト

$$\text{(A)}\quad M_r=\int \sigma(\mathfrak{v}^{(1)}\ \text{-------}\ \mathfrak{v}^{(r)})\,\Pi p^{iK}$$

次ニ γ ヲ E_n 内ノ単位球トスレバ $\mathfrak{K}+\lambda\gamma$ ノ体積ハ

$$V(\mathfrak{K}+\lambda\gamma)=W_0+n\lambda W_1+\cdots\cdots+\binom{n}{\nu}\lambda^{\nu}W_{\nu}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\lambda^{n}W_n$$

Bonnesen und Fenchel: Theorie der Konvexen

Körper S.49 Formel (4) ニヨレバ（ソコデ $\frac{1}{n}$ ガオチテヰル）.

$$W_\nu(\mathfrak{K}) = \frac{1}{nK_{n-1}}\int W'_{\nu-1}(\mathfrak{K}\mathfrak{x})\,d\omega$$

コヽニ $W'_{\nu-1}(\mathfrak{K}\mathfrak{x})$ ハ $\mathfrak{K}$ ノ $\mathfrak{x}$ 方向ヘノ正射影（之モ konvexer Körper）ノ $W_{\nu-1}$ ヲアラハシ $d\omega$ ハ γ ノ $\mathfrak{x}$ 方向ノ半径ノ端デノ Flächenelement, K_{n-1} ハ $n-1$ 次元単位球ノ体積デアル.（窪田博士：東北理科報告 Bd. 14参照）

コノ Formel ヲ繰返シ用ヒテ

$$W_r(\mathfrak{K}) = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)K_{n-1}\cdots K_{n-r}}\int W_0^{(r)}(\mathfrak{K}\mathfrak{x}^{(1)}\cdots\mathfrak{x}^{(r)})\,d\omega_1\cdots$$
$$\cdots d\omega_r$$

但シ $d\omega_\nu$ ハ原点ヲトホル $\mathfrak{x}^{(\nu+1)}\cdots\cdots\mathfrak{x}^{(r)}$ ニ垂直ナ平面内デノ $s+\nu$ 次元単位球ノ $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ ナル方向ノ半径ノ端デノ Flächenelement デアル。

ソコデ先ヅ $d\omega_1$ ヲ考ヘルトキ適当ニ Drehung ヲ行ツテ

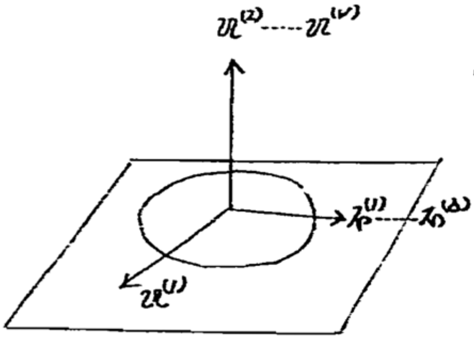
$$\mathfrak{x}^{(2)} = (0,\cdots\cdots 0,\overbrace{1,0\cdots\cdots 0}^{r-1})$$

$$\mathfrak{x}^{(3)} = (0,\cdots\cdots 0,\overbrace{1,0\cdots\cdots 0}^{r-2})\cdots\cdots\mathfrak{x}^{(r)} = (0,\cdots\cdots 0,1)$$

トスレバ

$$d\omega_1 = \sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}u_i^{(1)}\,\dot{u}_1^{(1)}\cdots\cdots\dot{u}_{i-1}^{(1)}\,\dot{u}_{i+1}^{(1)}\cdots\cdots\dot{u}_{s+1}^{(1)}$$

$\mathfrak{u}^{(1)}\mathfrak{w}^{(1)}\cdots\cdots\mathfrak{w}^{(s)}$ ハ正規直交系ヲナスカラ



$$dw_1 = \sum (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} v_1^{(1)} \cdots v_{i-1}^{(1)} & v_{i+1}^{(1)} \cdots v_{s+1}^{(1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ v_1^{(s)} \cdots v_{i-1}^{(s)} & v_{i+1}^{(s)} \cdots v_{s+1}^{(s)} \end{vmatrix} \dot{u}_1^{(1)} \cdots \dot{u}_{i-1}^{(1)} \dot{u}_{i+1}^{(1)} \cdots \dot{u}_{s+1}^{(1)}$$

$$= (\dot{u}_1^{(1)} v_1^{(1)} + \dot{u}_2^{(1)} v_2^{(1)} + \cdots\cdots + \dot{u}_{s+1}^{(1)} v_{s+1}^{(1)}) \cdots$$

$$\cdots\cdots (\dot{u}_1^{(1)} v_1^{(s)} + \cdots\cdots + \dot{u}_{s+1}^{(1)} v_{s+1}^{(s)})$$

$$= (\dot{\mathfrak{u}}^{(1)}\mathfrak{w}^{(1)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(1)}\mathfrak{w}^{(2)})\cdots\cdots(\dot{\mathfrak{u}}^{(1)}\mathfrak{w}^{(s)})$$

Skalarprodukt ハ Drehung ニ對シテ不変ダカラ一般ノ位置デ

$$dw_1 = (\dot{\mathfrak{u}}^{(1)}\mathfrak{w}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(1)}\mathfrak{w}^{(s)})$$

dw_2 ノトキモ大体同様ニシテ

$$dw_2 = (\dot{\mathfrak{u}}^{(2)}\mathfrak{w}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(2)}\mathfrak{w}^{(s)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(2)}\mathfrak{u}^{(1)})$$

以下同様ニ

$$dw_3 = (\dot{\mathfrak{u}}^{(3)}\mathfrak{w}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(3)}\mathfrak{w}^{(s)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(3)}\mathfrak{u}^{(1)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(3)}\mathfrak{u}^{(2)})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$dw_r = (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)}\mathfrak{w}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)}\mathfrak{w}^{(s)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(r)}\mathfrak{u}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)}\mathfrak{u}^{(r-1)})$$

ソレ故

$$dw_1 \cdots\cdots dw_r = \prod_{\substack{i=1,\cdots r \\ K=1,\cdots s}} p^{iK} \cdot S \tag{B}$$

コヽニ $S = (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)}\mathfrak{u}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)}\mathfrak{u}^{(r-1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(2)}\mathfrak{u}^{(1)})$

即チ S ハ上記 Blaschke I, S. 14 ノ sphärische Kinematik ノ Mass ニ對スル Dichte ニ他ナラナイ．又

$$\sigma(u^{(1)}\cdots\cdots u^{(r)}) = W_0^{(r)}(\mathfrak{K}\, v_+^{(1)}\cdots\cdots v^{(r)})$$

ダカラ (B) ヲ (A) ニ入レルトキハ

$$W_r(\mathfrak{K}) = c_r\int\sigma(u^{(1)}\cdots\cdots u^{(r)})\,\Pi p^{ik}\cdot S$$

$$= c_r\int\left[\int G_r\right] S.$$

$\int G_r$ ハ S ニハ無関係デアルカラ

$$= c_r\int S\int G_r$$

又上ニノベタコトト同ジ様ニシテ

$$\int S = \omega_r\,\omega_{r-1}\cdots\cdots\cdots\omega_2$$

但シ、ω_ν ハ ν 次元単位球ノ表面積

ソレデ

$$W_r(\mathfrak{K}) = c_r'\int G_r$$

$$c_r' = \frac{(n-r)\,\omega_r\cdots\cdots\cdots\omega_1}{n\cdot(n-1)\,\mathcal{K}_{n-1}\cdots\cdots\cdots(n-r)\,K_{n-r}}$$

$$= \frac{n-r}{n}\;\frac{\omega_r\cdots\cdots\cdots\omega_1}{\omega_{n-1}\cdots\cdots\cdots\omega_{n-r}}$$

即チ $\mathfrak{K}$ ノ Quermassintegral W_r ハ r ニノミ関係スル Faktor ヲノゾイテハ $\mathfrak{K}$ ニ交ハル平面 E_r ノ Mass ニ等シイ。

従ツテ E_2, E_3 ニ於テ Crofton ノエタ結果ハ一般ノ次元ニ擴張サレタコトニナル。(例ヘバ W. Blaschke: Differentialgeometrie I: 2 Aer aufl. S. 164 参照)

示トシテ E_n 内ニ二ツノ閉曲面 $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ (konvex デナ

クテモイヽノガアツテ $\mathfrak{K}_1$ ハ $\mathfrak{K}_2$ ニ含マレテキルトスル、ソノトキ $\mathfrak{K}_2$ ヲキル r 次元平面ガ $\mathfrak{K}_1$ ヲモキル確率ハ

$$\frac{W_r(\overline{\mathfrak{K}_1})}{W_r(\overline{\mathfrak{K}_2})}$$

デアル. 但シ $\overline{\mathfrak{K}_1}$, $\overline{\mathfrak{K}_2}$ ハ夫々 $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ ノ konvexe Hülle デアル。

以上 —11. 11. 25—