526. 函數方程式 $f(x,y)+f(x+y,z)=f(x,y+z)+f(y,z)$ ニ就イテ, I

角谷靜夫 (阪大)

函數方程式

$$f(x,y)+f(x+y,z)=f(x,y+z)+f(y,z) \quad \cdots\cdots (1)$$

ヲ考ヘル。コヽニ x, y, z ハアル linear space R ノ element, $f(x,y)$ ハ x, y ノ連續函數デ實數値ヲトルモノトスル。

(1) ヲ更ニ一般ニミテアル continuous group G ノ element x, y, z ニ對シテ函數方程式

$$f(x,y)+f(x\cdot y,z)=f(x,y\cdot z)+f(y,z) \quad \cdots\cdots (2)$$

ヲ考ヘルコトモ出來ルガ先ヅ (1) ヲ考ヘルコトニスル。シカモ linear space R ガ實數全体及ビ複素數全体ノ場合ヲ特ニ考ヘルコトニスル。コヽニ注意スベキハ R ガ實數全体ナルトキト複素數全体ナルトキトデ (1) ノ解ガソノ性質ヲ異ニスルコトデアル。

即チ R ガ実數全体ナルトキハ (1) ヲ滿足スル解 $f(x,y)$ ハ x, y ニ關シテ對稱デ

$$f(x,y)=\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y) \quad \cdots\cdots (3)$$

ト云フ形ニ書ケルガ R ガ複素數全体ナルトキハ必ズシモサウデナイ。例ヘバ

$$f(x,y)=x\bar{y} \quad \cdots\cdots (4)$$

ハ (1) ノ解ヲ與ヘル。

最初ニRガ實數全體ナルトキヲ考ヘル。$f(x,y)$ガ(1)ヲ滿足スレバ $f(x,y)+constant$ モ(1)ヲ滿足スルカラ $f(0.0)=0$ ト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。

見當ヲツケルタメニ $f(x,y)$ガ必要ナトコロマデ偏微分可能デアルト假定スレバ(1)ノ兩辺ニ $\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}$ ヲ施スコトニヨリ

$$f_{12}(x+y,z)=f_{12}(x,y+z)$$

ヲ得ル。但シ

$$f_{12}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$$

デアル。コレヨリ

$$f_{12}(x,y)=p(x+y)$$

ヨツテ一般解ハ

$$f(x,y)=\varphi(x+y)+g(x)+r(y)$$

ニヨツテ與ヘラレル。$g(x)$, $r(y)$ヲ決定スルタメニ、之ヲ(1)ニ代入スレバ

$$\varphi(x+y)+g(x+y)+r(y)$$
$$=\varphi(y+z)+r(y+z)+g(y)$$

右辺ハ x ヲ含マナイカラ左辺ハ x ニ無關係ニナラネバナラナイ。ヨツテ

$$\varphi(x)+g(x)=const.$$

同様ニ

$$\varphi(x)+r(x)=const.$$

ヲ得ル。コレヨリ (1) ノ一般解ニテ $f(0,0)=0$ トナルモノハ

$$f(x,y)=\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y),\quad \varphi(0)=0$$

ニヨッテ與ヘラレルコトガワカル。

コノ解法ハ $f(x,y)$ ノ偏微分可能性ヲ假定シタケレドモ、一般ニ continuous b. $\varphi(x)$ ニ對シテ (3) ニヨッテ $f(x,y)$ ヲ定義スレバソレガ (1) ヲ滿足スルコトハ明カデアル。

次ニ $f(x,y)$ ノ連續性ノミカラ (1) ノ一般解ガ (3) トナルコトヲ示サウ。

先ヅ $f(x,y)$ ガ x,y ノ對稱函數ナルコトヲ示ス。

(1) ニ於テ $x=y=0$ トオケバ

$$f(0,0)+f(0,z)=2f(0,z)$$

$$\therefore\quad f(0,z)=0 \qquad \cdots\cdots (5)$$

同様ニ (1) ニ於テ $y=z=0$ トオケバ

$$f(x,0)=0 \qquad \cdots\cdots (6)$$

ヲ得ル。

次ニ (1) ニ於テ $x=y=z=\xi$ トオケバ

$$f(\xi,2\xi)=f(2\xi,\xi)$$

ヲ得ル。一般ニ m,n ヲ正ノ整數トスルトキ

$$f(m\xi,n\xi)=f(n\xi,m\xi) \qquad \cdots\cdots (7)$$

ナルコトヲ証明シヨウ。

$m+n$ ニ關シテ歸納法ヲ用ヒル。$m+n\leqq 3$ ナル時ハ明カデアルカラ $m+n\leqq k$ ナルトキニ (7) ガ成立スルト

假定シテ $m+n=k+1$ ナルトキニモ (7) が成立スルコトヲ示セバヨイ。$m=n$ ナルトキハ (7) ハ明カデアルカラ $m>n$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。(1) ニ於テ $x=z=n\xi$, $y=(m-n)\xi$ トオケバ

$$f(n\xi,(m-n)\xi)+f(m\xi,n\xi)$$
$$=f(n\xi,m\xi)+f((m-n)\xi,n\xi) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

然ルニ $n>0$, $m-n>0$ ニテ $n+(m-n)=m\leqq k$ デアルカラ、$(n,(m-n))$ ニ對シテハ (7) が成立シテ

$$f(n\xi,(m-n)\xi)=f((m-n)\xi,n\xi)$$

ヨッテ (8) ヨリ

$$f(m\xi,n\xi)=f(n\xi,m\xi)$$

ヲ得ル。

次ニ m,n が正ノ整數ナルトキ

$$f(m\xi,-n\xi)=f(-n\xi,m\xi) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ナルコトヲ示サウ。(1) ニ於イテ $x=z=\xi$, $y=-\xi$ トオケバ

$$f(\xi,-\xi)=f(-\xi,\xi)$$

ヲ得ル。ヨッテ (2) ハ $m+n\leqq 2$ ナルトキ明カデアル。

今 $m+n\leqq k$ ナルトキニ (9) が成立スルトシテモ $m+n=k+1$ ナルトキニ (9) が成立スルコトヲ示サウ。(1) ニ於テ $x=z=m\xi$, $y=-n\xi$ トオケバ

$$f(m\xi,-n\xi)+f((m-n)\xi,m\xi)$$
$$=f(m\xi,(m-n)\xi)+f(-n\xi,m\xi)$$

デアル。$m\geqq n$ デアレバ既ニ証明シタコトニヨリ

$$f((m-n)\xi, m\xi)=f(m\xi, (m-n)\xi)$$

デアリ、又 $m<n$ デアレバ

$$-(m-n)+m=n\leqq k$$

デアルカラ又同ジコトガ云ヘル。ヨツテ結局

$$f(m\xi, -n\xi)=f(-n\xi, m\xi)$$

ヲ得ル。

(7)(9) ヨリ任意ノ(正又ハ負ノ)有理數 r ニ對シテ

$$f(\xi, r\xi)=f(r\xi, \xi)$$

デアル。ヨツテ $f(x, y)$ ノ連續性ヨリ任意ノ x, y ニ對シテ

$$f(x, y)=f(y, x)$$

ヲ得ル。コレハ $f(x, y)$ ガ x, y ノ symmetric function ナルコトヲ示シテヰル。