529. Omoituita Mama. VII

福原満洲雄（北大）

1. 南雲氏ハ日本ノ數學ニハ「デレッタンチスト」ガ不足シテヰル、ト言ハレル。確カニソウデアロウ。ソノ上ニ理論家バカリ多クテ実際家ガ欠乏シテヰル。
此ノ紙上談話會ニ應用数學トカ実用数學トカ言ッタ方面ノモノガ滅多ニ現ハレナイデモ不思議ニ思ハレテヰナイヤウデアル。恰モ「數學＝純正数學」デアルカノヤウニ、ダガコレ

ハ自分ノ得目カモ知レナイ。

2．微分方程式ノ理論ノ方ハ兎ニ角，應用方面ハ全ク素人デアル。ダカラコレカラ述ベル所ハ私ノ素人考デアル。

微分方程式論ノ書ニ於テ数値計算ヲ論ジテナクテモ不満ヲ感ズル人ノ方ガ少ナイダラウト思フ、二三年前マデハ私モソノ一人デアッタ。

ダガ微分方程式論ガ微分方程式ヲ解クタメノ理論デアルナラバ，ソノ数値積分ヲ無視スルコトハ出來ナイ。解析的ノ理論ガ未ダ幼稚デ實際ニ微分方程式ヲ解クタメニ大キナ役割ヲ演ズルコトハ出來ナイ現状ニ於テハ尚更ソウデアル。岩波講座ニ微分方程式論ヲ書クトキコンナ事柄ニ氣ガツカナカッタトハ何タル迂濶ゾヤト言ハレテモ一言モナイ。

3．日高氏ノ「数値積分法，上巻」ハ近頃ノ名著デアル、自分ノヤウナ素人デモ興味深ク通読スルコトガ出來タ、ダガ一言シナケレバナラナイコトガアル、ソレハ解析的ノ理論ニ對スル誤解デアル、此ノ書ガ名著デアレバアル程，此ノ書ヲ読ム人ガ多クナレバナル程，コノ点ヲ明カニシテ置ク必要ガアル。而モコノ誤解タルヤ日高氏ノミニ止マラナイノデアル。理論ト実際ノ分離ニ拍車ヲカケルヤウナ言葉ハ見逃スコトハ出來ナイ。「微分方程式ノ解析的理論モ微分方程式ヲ解クコトガ目的デアル」此ノ点ガハッキリ分レバコノ誤解ハ自然ニ消滅スル。

「我々実際家ノ立場カラ言ヘバ、微分方程式ヲ解ク最終ノ目的ハ多ク解析的ノ解式自身ニアラズシテソノ数値ニアル

コトヲ忘レテハナラナイ、而モ解析的ノ解式カラ数値ヲ計算スル手数ハ甚ダシク面倒デムシロ始メカラ数値解法ニヨル方ガ速ク結果ニ到達スルコトガ多イ」（77頁） 解式ヲ求メルコトガ解析的ノ理論デアルカノヤウデアル。マサカ「解析的理論＝求積法」ト考ヘテ居ラレルノデハナイデアラウガ. 88—90頁ニ於イテ Runge–Kutta 法ノ例トシテ

$$x+y\frac{dy}{dx}=2y, \qquad y(0)=1$$

ヲ取ッテ積分シテ居ラレル。続イテ92頁ニ移ル、「處デコノ方程式ヲ実際ニ解析的ニ解イテ見ヨウ。（途中ノ計算ヲ略ス）

$$(x-y)e^{\frac{x}{x-y}}+1=0$$

ガ積分デアル。解析的ニハ正シクコレデ積分ハ完了シタワケデアル」コヽガ問題デアル。コレデハ求積法ニヨッテ解ケタダケデ解析的ニ解ケタノデハナイ。「併シコレニ依ッテ x ト y トノ関係ヲハッキリ知ルコトハ困難デアル」ソレコソ私ノ言ヒタイコトデモアル。ソレダカラ解析的理論デモ求積法デ解クコトヲ目標ニシテハ居ナイノデアル。多クノ場合微分方程式ガ求積法デ解ケナイコトハ周知ノ事實デアル。而モ運ヨク求積法デ解ケテモ、ソレダケデハ解ノ性質ガ分ルトハ言ヘナイ. 求積法ガ過去ニ於イテドレ程輝カシイ功績ヲ残シタニセヨ、此ノ明カナ事実ヲ無視スルコトハ出来ナイ。コヽ

ニ於イテ求積法デ解ケナイヤウナ一般ノ微分方程式ヲモ解カンガタメニ現ハレタノガ近代ノ微分方程式論デアル、トシタラ求積法ガ微分方程式論ニ於テ占メル位置ハ自ラ了解サレルト思フ。

假令コノヤウナ病ガアルニシテモ名著ハ矢張リ名著デアル、ソノ下巻ガ現ハレルノヲ樂ミニシテヰル。

4. 数値積分ト解析的理論ト對立サセテ考ヘルノハ間違ヒデアル。ソノ間ニハッキリシタ境界ガアル筈ハナイ、便宜上ノ区別デアル。或ハ又数値積分法ハ解析的理論ニ基礎ヲ置イテヰルノダトモイヘヨウ。

Runge-Kutta 法ニセヨ、Adams-Bashforth 法ニセヨ，其ノ他ドノ法ニシテモ次ノ簡單ナ事実カラ出發シテヰルノデアル。「微分方程式 $y'=f(x,y)$ ニ於イテ $f(x,y)$ ガ (x_0,y_0) ノ近傍デ正則ナラバ $y(x_0)=y_0$ ヲ満足スル解ハ唯一ツ存在シ x_0 デ正則デアル」

故ニソノ解ノ x_0+h ニ於ケル値ハ

$$(1)\qquad y=y_0+a_1h+a_2h^2+a_3h^3+\cdots\cdots$$

ナル形ニ展開サレル。實際ノ計算ニ於テハコノ級数ノ最初ノ数項ダケヲ取ルノデアル、hガ十分ニ小サケレバソレデヨイワケデアル。併シ実際問題トシテソレヲ出來ルダケ速ク求メル必要ガアル。如何ニ理論的ニハ計算出來ル筈ダト言ッテモ、ソノ手数ガ甚ダシク面倒デハ実用価値ハナイ。ソコデ計算ノ方法ニ工夫ヲ要スルノデアル。Runge-Kutta 法其他種々ナ方法ガ現レルワケデアル。

今 x_0, y_0, h ガ與ヘラレタトキ，ソレカラ或ル手續ニヨツテ $F(x_0, y_0, h)$ ガ求メラレルトスル、コレヲ h ノ冪級数ニ展開シタトキソノ係数ガ (1) ノ係数ト最初ノ数項ニ於テ一致スルナラバ y ノ値トシテ $F(x_0, y_0, h)$ ヲ取ルコトガ出來ル。ソレデアルカラ x_0, y_0, h カラ出來ルダケ計算シ易イ，而モソノ展開式ノ係数ガ (1) ノソレト出來ルダケヨク一致スル $F(x_0, y_0, h)$ ヲ求メルコトガ實際問題トシテ大切ナノデアル。

Runge-Kutta 法ニ於テハ h^4 ノ項マデ完全ニ一致シテ居ルノデアル（日高氏，85頁）。コノヤウニシテ $x_1 = x_0 + h$ ニ於ケル y ノ値 y_1 ガ求マッタナラバ $x_2 = x_1 + h$ ニ於ケル y ノ値 y_2 ヲ前ノヤウニシテ求メル、コノヤウニシテ $b = x_0 + nh$ ニ於ケル y ノ値ガ求メラレタトスル、ソノ値ハ $h \to 0$ ノトキ正シイ $y(b)$ ニ限リナク近ヅク、コレハ証明出來ルガ微分方程式論ノ書物ニハ載ッテヰナイ、但シ

(2) $F(x_0, y_0, h) = y_0 + f(x_0, y_0)h$

ノ場合ダケハ出テ居ル。ソレガ Cauchy-Lipschitz ノ方法デアル、Cauchy-Lipschitz ノ方法デ解ノ存在ヲ証明シタラソレダケデ目的ヲ達シタヤウニ他ノ問題ヘト移ッテ行ク。

数学者ニハ微分方程式ノ解ガ存在スルカ否カトイフコトダケガ問題デデモアルカノヤウナ感ジヲ實際家ニ抱カセタトシテモ不思議デハナカラウ。

5. $f(x, y)$ ノ連続性ヲ假定スルダケデモ (2) ナラバ hヲ小サクトルコトニヨリ y ノ正シイ値ニ幾ラデモ近イ値ガ求マル。ソウイフ意味ニ於イテ一般性ハアルガ，ソレダケ $f(x, y)$ ガ正則函数トイフヤウナ場合ニハ適切デナイノデアル。

例ヘバ $x=0$ ニ於テ初期條件ガ與ヘラレテ居リ，$x=1$ ニ於ケル値ヲ求メルトスル。Runge-Kutta法ナラバ $h=0.1$ トシテ十分ニ精密ナ値ヲ求メラレルガ (2) ニ依ッテ計算スレバ $h=0.005$ トシナケレバナラナイトスル（假ニ解ヲ h ノ冪級数ニ展開シタトキノ係数ガ大体 1 ニ等シトスレバ Runge-Kutta 法デハ誤差ガ粗雑ニ考ヘレバ $h^5=0.00001$，一方ニ於テ (2) ヲ取レバ $h^2=0.000025$ トナルカラソレダケデモ (2) ヲ取ッタ方ガ精密度ガ落チルコトノ見當ハツク。

ソノ上ニ繰返ス操作ノ数ガ多イホド誤差ガ何重ニモ重ナッテ來ルカラ精密度ハ益々落チル）繰返ス操作ノ数ハ (2) ヲ取レバ 200 回ダガ，Runge-Kutta 法ナラバ 10 回デアル、如何ニ一回ノ操作ハ (2) ノ方ガ樂デアッテモ全体トシテ見レバ (2) ニヨッテ計算スルヨリ Runge-Kutta 法ノ方ガ速イコトハ明デアル。

6. 今 $F(x_0, y_0, h)$ ノ展開式ハ (1) ト h^4 ノ項マデ一致スルトシヨウ、$f(x, y)$ ガ x, y ニ関シテ四回連続微分可能ナラバ，y ノ近似値トシテ $F(x_0, y_0, h)$ ヲ取ルコトガ出來ル。

併シソウデナイ場合ニ無理ニ $F(x_0, y_0, h)$ ヲ取ツテモヨイ結果ハ望メナイ所カ計算ガ無意味トナルカラ解ニ收斂シナクナツタリスル、ソレデアルカラ数値積分法ハ主ニ $f(x, y)$ ガ正則ナ範囲デ使ハレルノデアツテ，ソノ特異点ノ近傍ニ於テ使フトキニハ十分ニ注意ヲ要スル。

日高氏ノ書 135—138頁ニハ

$$\frac{dy}{dx}=z, \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\lambda y}{x(1-x)(1-0.83x^2)}$$

ヲ取ツテ $x=0$ カラ正ノ方向ニ Runge-Kutta 法ニヨツテ積分シテ居ル。

驚クベシ $x=0$ ハ右辺ノ特異点デアル。併シ幸ナコトハソノ解ガ $x=0$ デ正則ナノデアル、ソレダカラ Runge-Kutta 法ヲ使フコトガ出來ルノデアル。何時デモコンナニ都合ヨク行クトハ限ラナイ。「只注意スベキハ数値解法ヲ應用スルニ際シ若シ $y=x^\alpha w(x)$ (α ハ常数) ナル形ノ解ガアルコトガ判ツテ居ルナラバ $y=x^\alpha w(x)$ トシテ原方程式ニ代入シテ $w(x)$ ニ関スル方程式トシテ解クベキデアル」(日高氏，139頁)

$y=x^\alpha w(x)$ ($w(x)$ ハ $x=0$ デ正則ナ函数) ナル形ノ解ノ存在ヲ何ニヨツテ知ルノデアラウカ。数値積分ハ正則ナ範囲デ使フベキデアルカラ α ガ正ノ整数デナイ場合ニハ $w(x)$ ノ方程式ニ對シテ数値積分ヲ行フベキデ當然ナ注意デハアルガ，特異点ノ近傍ニ於テ何時デモ解ガ $y=x^\alpha w(x)$ ナル形ニナルワケデナイカラ困ル。

$y = w(x^\alpha)$ ナル形ノ解ヲ求メル場合ニハ $x^\alpha = t$ ヲ独立変数ニ取ルベキデアル。特異点ノ近傍ニ於テ数値積分ヲ行フ場合ニハソコデドウイフ形ノ解ガ存在スルカヾ分ツテ居ナケレバナラナイ。ソレヲ教ヘルノガ解析的理論デアル。実際ニハ簡單ナ特異点シカ現ハレナイナラベ幸デアルガ將來決シテ複雑ナ特異点ニ出會フコトハナイト断言出來ル人ハアルマイ。

解析的理論ハ特異点ヲ如何ニ扱フベキカヲ教ヘルノデアル（勿論ソレダケデハナイ）。ソレデアルカラドウイフ場合ニドウイフ形ノ解ガ存在シテ、ソレ以外ノ解ハ存在シナイトイフコトヲ調ベルノガ微分方程式論ニ於イテ最モ大キナ研究題目ノ一ツデアル。

線形微分方程式ノ不確定特異点ニ関スルコノ問題ニ決定的ノ解決ヲ與ヘタノガ前回紹介シタ Trjitzinski ノ論文デアル。

ソレデアルカラソノ研究ヲ本格的ト云フタノデアル。併シ線形デナイ微分方程式ノ場合ニハ，我々ノ理論ハ未ダ幼稚ナモノデアル。一階ノ微分方程式ノ場合ダケハ未ダ発表シテ居ナイガ可ナリ決定的ナ結論ヲ得タトハイヘ、二階ノ場合ハ殆ンド何ノ見當モツイテ居ナイ。