530. 有理函數ノ二三ノ性質

丸山　俊朗（東京文理大學生）

§1.　有理函數ヲ

$$(1)\qquad R(x)=\frac{P_\mu(x)}{Q_\nu(x)}$$

トスルトキ，$\lambda=\max(\mu,\nu)$ ヲ $R(x)$ ノ次數ト呼ブ，但シ P_μ, Q_ν ハ夫々 μ, ν 次ノ x ノ多項式デ，互ニ素デアルトスル。$R(x)$ ガ λ 次ノ有理函數ナラバ，有限又ハ無限ナル任意ノ常數 ζ ニ對シテ方程式

$$(2)\qquad R(x)=\zeta$$

ノ有限根ノ數（但シ各根ハ重複度ダケ數ヘル）ハ一般ニ λ デアル。λ ヨリ小ナルトキ，ソノ ζ ヲ R ノ除外値ト呼ブ。有理函數ハ常ニ唯一ツノ除外値ヲ有スル。即チ $\mu\lessgtr\nu$ ナルニ從ツテ夫々

$$\zeta=0,\ \frac{P_\mu(\infty)}{Q_\nu(\infty)},\ \infty$$

ガソノ除外値デアル。

方程式(2)ガ少クトモ一ツノ重複根ヲ有スルトキ，ζ ヲ $R(x)$ ノ重複値ト呼ビ，又(2)ガ重複根ノミヲ有スルトキ，ζ ヲ $R(x)$ ノ完全重複値 *valeur complètement multiple* ト呼ブ。

有理函數ニ關シテ次ノ基礎定理ガ成立スル：

定理 I　$R(x)$ ヲ常數ナラザル λ 次ノ有理函數トス

レバ，方程式

(3) $R(x) = z_K \quad (K=1,2,\cdots\cdots,n)$

ノ相異ナル有限根ノ数ノ和ハ $(n-2)\lambda+1$ ヨリ小ナラズ、但シ z_K ハ相異ナル n 個ノ数（有限又ハ無限ナル）トスル。

証明： $R(x)$ ヲ (1) ノ形デ表ハシ，$\mu < \nu = \lambda$ ナル場合ニツイテ証明スル。他ノ場合モ同様デアル。ナホ $R(x)$ ガ常数ナラズトノ仮定カラ $\lambda \geqq 1$， 従ツテ定理ハ $n=1$ ノトキ明カニ成立スル。故ニ $n \geqq 2$ トシテ差支ナイ。

z_1 ヲ R ノ除外値トスレバ，方程式 (3) ノ有限根ノ数（各根ハソノ重複度ダケ数ヘル）ノ和ハ $(n-1)\lambda+\mu$ デアル。ソノ中ノ重複根ヲ $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_j$ トシ，ソノ重複ノ次数ヲ夫々 $m_1,\cdots\cdots,m_j$ トスレバ，$R'(x) = \dfrac{d}{dx}R(x)$ ノ分母ニ相当スル多項式 $P'_\mu(x)Q_\nu(x) - P_\mu(x)Q'_\nu(x)$ ハ $\prod_{K=1}^{j}(x-\alpha_K)^{m_K-1}$ ヲ因数トスル。然ルニコノ多項式ハ $\mu+\nu-1$ 次デアルカラ，明カニ

$$\mu+\nu-1 \geqq \sum_{K=1}^{j}(m_\nu-1)$$

従ツテ (3) ノ相異ナル有限根ノ数ノ和ヲ N トスレバ

$$N = (n-1)\lambda+\mu-\sum_{1}^{j}(m_K-1) \geqq (n-1)\lambda+\mu-(\mu+\nu-1)$$
$$= (n-2)\lambda+1$$

z_K ノ中ニ除外値ガナケレバ

$$N = n\lambda - \sum_{1}^{j}(m_k - 1) \geqq n\lambda - (\mu + \nu - 1)$$
$$= (n-1)\lambda + 1 - \mu > (n-2)\lambda + 1$$

証明終リ。

ナホ，α_k ノ中ニ除外値ガナイトキノ N ノ値ハ

1°. $\mu \neq \nu$ ナル場合ニハ

(4) $N \geqq (n-1)\lambda + 1 - \lambda_1$, $\lambda_1 = \min(\mu, \nu)$;

2°. $\mu = \nu = \lambda$ ナル場合ニハ

$$\frac{P_\mu}{Q_\nu} = \alpha_0 + \frac{P_{\mu'}}{Q_\nu}$$

但シ $\alpha_0 = \dfrac{P_\mu(\infty)}{Q_\nu(\infty)}$，従ッテ $\mu' < \lambda$

トオクコトニヨリ

$$N \geqq (n-1)\lambda + 1 - \mu'$$

ナル関係ヲ満足スル。

定理1ニ於イテ，方程式(3)ノ根ヲ有限ナル根ニ限ラナケレバ，次ノ如クニ述ベルコトガ出来ル。

定理1* $R(x)$ヲ常数ナラザルλ次ノ有理函数トスレバ，方程式(3)ノ相異ナル根（有限又ハ無限ナル）ノ数ノ和ハ $(n-2)\lambda + 2$ ヨリ小ナラズ、但シ α_k ハ相異ナル n 個ノ数（有限又ハ無限ナル）デアル。

α_k ノ中ニ除外値ガアレバ (3) ノ根ニハ ∞ ガ参加スル。又 α_k ノ中ニ除外値ガナケレバ上ノ考察ニヨリ，根ハ凡ベテ有限根デアルケレドモ，ソノ相異ナルモノノ総数ハ $(n-2)\lambda+1$

ヨリ大デアル。故ニ定理ハ成立スル。
（但シコノ定理ハ後ニ使用スルコトナシ）

有理函数ガ特ニ多項式トナレル場合，即チ $\lambda=\mu,\ \nu=0$ ナル場合ニハ，$z=\infty$ ノミガ除外値トナリ，且ツ $\lambda_1=Min(\mu,\nu)=0$ デアルカラ，(4) ヲ参照スルコトニヨリ；

<u>定理 1'</u>　$P(x)$ ヲ常数ナラザル λ 次ノ多項式トスレバ，方程式

$$P(x)=z_K \qquad (K=1,2,\text{------},n)$$

ノ相異ナル根ノ数ノ和ハ $(n-1)\lambda+1$ ヨリ小ナラズ、但シ z_K ハ相異ナル n 個ノ有限数トスル。

§2. 定理 1' ヨリ直チニ次ノ一致ノ定理 Théorème d'unicité ガ得ラレル。

<u>定理 2</u>（一致ノ定理）　常数ナラザル二ツノ多項式 $P(x)$, $Q(x)$ アリ，方程式

$$P(x)=z_K,\ Q(x)=z_K \qquad (K=1,2)$$

ガ常ニ同一ノ x ニヨッテノミ満足サレルナラバ

$$P(x)\equiv Q(x)$$

但シ z_1, z_2 ハ相異ナル二ツノ有限数

証明：　上ノ二組ノ方程式ノ相異ナル根ヲ $x_1,\text{-------------}, x_{l+1}$ トスル、定理 1' ヲ $n=2$ ニ関シテ利用スレバ，P, Q ノ次数ハイヅレモ l ヲ越ヘナイコトガ分ル。而シテ l 次ヲ越エザル多項式 $P-Q$ ガ相異ナル $l+1$ 個ノ有限点 x_K ニ於イテ零トナルカラ $P-Q=0$, 即チ $P\equiv Q$

定理３（重複値ニ関スル定理）

多項式ノ完全重複値（有限）ノ数ハ１ヲ越ヘナイ。

若シ二ツノ有限ナル完全重複値 a, b ガ存在スルナラバ，方程式

$$P(x)=a,\quad P(x)=b$$

ノ相異ナル有限根ノ数ノ和ガ λ 以下トナリ，定理１′ニ反スル。

一般ナル有理函数ニツイテハ定理１ヲ適用スレバヨイ。

定理４.（一致ノ定理）　二ツノ有理函数 $R_1(x), R_2(x)$ ガ常数ナラズシテ，方程式

$$R_1(x)=z_K,\quad R_2(x)=z_K \qquad (K=1,2,3,4)$$

ノ有限根ガ常ニ共通根デアルナラバ，

$$R_1(x)\equiv R_2(x)$$

但シ z_1, z_2, z_3, z_4 ハ相異ナル有限又ハ無限数トスル。

証明：　上ノ方程式ノ相異ナル有限根ヲ $x_1, \cdots\cdots, x_{l+1}$ トシ，定理１ヲ $n=4$ トシテ利用スレバ，R_1, R_2 ノ次数ハ $l/2$ ヲ越ヘナイ。故ニ今 R_1, R_2 ヲ (1) ノ形デ表ハシ

$$R_1(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},\qquad R_2(x)=\frac{\overline{P}(x)}{\overline{Q}(x)}$$

トスレバ，$P, Q, \overline{P}, \overline{Q}$ ハイヅレモ $l/2$ 次以下ノ多項式デアル、依ッテ $P(x)\overline{Q}(x)-\overline{P}(x)Q(x)$ ノ次数ハ l ヲ越ヘナイ、然ルニコレハ相異ナル $l+1$ 個ノ有限点 x_K ニ於イテ零トナルカラ，コノ多項式 $\equiv 0$，即チ $R_1\equiv R_2$.

コノ定理ニ於ケル a_K ノ数 $\underline{4}$ ハコレヨリ小ナル数ヲ以テ置換ヘルコトガ出来ナイ。実際, 二ツノ有理函数

$$R_1(x)=\frac{4x}{(x+1)^2},\quad R_2(x)=\frac{2x}{x+1}$$

ハ同一ノ有限点ニ於テ $0, \infty, 1$ ナル値ヲトルケレドモ $R_1 \neq R_2$ デアル。

<u>定理5.</u> (重複値ニ関スル定理)

有理函数ノ完全重複値ノ数ハ3ヲ越ヘナイ。

何トナラバ, 完全重複値ガ4個アリトシ, コレヲ a_1, a_2, a_3, a_4 トスレバ, 方程式 $R(x)=a_K$ $(K=1, 2, 3, 4)$ ノ相異ナル有限根ノ数ガ 2λ 以下トナラネバナラナイ、コレハ定理ノト矛盾スル。上ノ完全重複値ノ数 $\underline{3}$ ハコレヨリ小ナル数ヲ以テ置換ヘルコトガ出来ナイ。実際, 有理函数

$$R(x)=\frac{-4x^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

ハ三ツノ完全重複値 $0, 1, \infty$ ヲ有スル。

(注意1) 有理型函数ニ関スル一致ノ定理及ビ完全重複値ノ数ニ就イテハ

R. Nevanlinna: Théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes (1939)

ヲ参照サレタイ。

(注意2) 上記ノ書物中ニアル第二基礎定理 *second théorème fondamental* ハ有理函数ニ関シテハ

$$(q-2)T(r)+\log r \leqq \sum_{1}^{q} N(r, z_k) - N_1(r) + O(1)$$

$$\leqq \sum_{1}^{q} \overline{N}(r, z_k) + O(1)$$

トナル. 定理Ⅰハコレヨリ直チニ導カレル。前述ノ定理ノ初等的証明ハ掛谷先生ノ御教示ニヨル。(1936, 12, 9)