# 672. 一階常微分方程式ノ特異點ニ就イテ, XVII

福 原 満 洲 雄 (九大)

(1) $x\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$

ニ於テ $f(x,y)$ ハ

(2) $f(x,y)\sim\sum\limits_{j,k}a_{jk}x^jy^k \quad (a_{00}=0,\ a_{01}=\lambda)$

ト展開サレル場合ハ VII (91号), VIII (93号), IX (94号), X (96号), XI (99号) デ述ベタノデアルガ, 餘リ假定ヲ幾リシテ分リ難クシタ嫌ヒガアルシ。今カラ見ルト証明ノ方針ニモ不満ノ點ガアルカラ再ビ改メテ述ベルコトニシタイ。

<u>形式的解</u> 先ヅ形式的ノ解ヲ求メルニハ補助変數ヲ含ム線形微分方程式 (138号) デ述ベタ一般的ナ方針ニヨリ

$$(3)\quad y=\sum_{j,k} p_{jk}\,x^j y^k \qquad (p_{00}=0,\ p_{01}=1)$$

ナル変換（級數ノ收斂性ハ問題トシテ居ナイ）ヲ行ッテ $u$ ニ關スル方程式ヲ出來ルダケ簡單ニスル。$u$ ニ關スル方程式ヲ

$$(4)\quad x\frac{du}{dx}=g(x,u)$$

トスレバ $g(x,u)$ ハ

$$g(x,u)\sim\sum_{j,k} b_{jk}\,x^j u^k. \qquad (b_{00}=0,\ b_{01}=\lambda)$$

ト展開サレル．ソノ係數ハ

$$b_{jk}=-(j+\lambda(k-1))\,p_{jk}+\cdots\cdots$$

トナル。書イテナイ部分ハ $p_{\alpha\beta}$ $(\alpha+\beta<j+k)$ ニ依テキマル。

故ニ $j+\lambda(k-1)\neq 0$ ナルトキ $C_{jk}=0$ トスルコトが出來ル。

依ッテ場合ハ次ノヤウニ分レル。

1° 最モ一般ナ場合． $g(x,u)$ ハ $\lambda u$ トナル。

從ッテ (1) ノ形式的ノ解トシテハ (3) ニ於テ $u=cx^{\lambda}$ ト置ケバヨイ。

2° $\lambda$＝正ノ整數．(4) ハ

$$x\frac{du}{dx}=\lambda u+ax^{\lambda}.$$

從ッテ (1) ノ解トシテハ (3) ニ於テ

$$u = x^{\lambda}(a\log x + C)$$

ト取レバヨイ。

以上ハ既ニヨク知ラレタ場合デアル。

3° $\lambda = 0$. 此ノ場合ニハ $g(x, u)$ ガ $x$ ヲ含マナイヤウニ出來ル。依ッテ (4) ハ

$$x\frac{du}{dx} = u\,g(u)$$

$$g(u) \sim \sum_{k} b_{k} u^{k} \qquad (b_0 = 0)$$

トナル。若シ $g(u)$ ノ展開式ノ係數ガ皆 $0$ トナレバ (3) ニ於テ $u = C$ ト取レバヨイ。$g(u)$ ノ展開式ノ係數ノ中ニ $0$ デナイモノガアレバ (4) ハ XII (143号) デ述ベタヤウニ

$$x\frac{du}{dx} = au^{n+1} + a'u^{2n+1}$$

トナル、此ノ場合ハ $a' \neq 0$ ナラバ

$$u = \left(\frac{a'}{a}\,\alpha\left(-\frac{na^2}{a'}(\log x + C)\right)\right)^{-\frac{1}{n}}$$

$a' = 0$ ナラバ

$$u = \left(-na(\log x + C)\right)^{-\frac{1}{n}}$$

ト取レバヨイ。

4° $\lambda = \frac{\nu}{n} =$ 負ノ有理數. Malmquist ハ此ノ

場合ヲ論ジテ居ルガ，形式的ノ解ノ形ニツイテハ何ヲ言ツテ居ナカッタヤウニ記憶シテヰル、此ノヤウナ場合ニ形式的ノ解ガドンナ形ヲ持ツカ一寸見當ガツカナイガ、上ニ述ベタ一般的ナ方法ニヨレバ直チニ解決ガツク。

$j+\lambda(k-1)=0$ トナル場合ハ $j=\nu h$, $k=\mu h+1$ デアル。依ツテ (4) ハ

$$x\frac{du}{dx}=u\left(\lambda+\sum_{h=1}^{\infty}a_h(x^{\nu}u^{\mu})^h\right)$$

トナル。$a_h$ ガ皆 $0$ トナレバ $u=Cx^{\lambda}$ ト取ルコトガ出來ルカラ $1°$ ト全ク同ジ狀態ニナル。

$a_h$ ノ中ニ $0$ デナイモノガアルトスル．$x^{\nu}u^{\mu}=v$ ト置ケバ

$$x\frac{dv}{dx}=\mu v\sum_{h=1}^{\infty}a_h v^h$$

トナル．コレハ

$$v=\sum q_h w^h \qquad (q_0=0,\ q_1=1)$$

ヲ適當ニ取ルコトニヨリ

$$x\frac{dw}{dx}=aw^{n+1}+a'w^{2n+1}$$

トスルコトガ出來ル．$w=x^{\nu}U^{\mu}$ ト置ケバ

$$x\frac{dU}{dx}=\frac{U}{\mu}\left(-\nu+a(x^{\nu}U^{\mu})^n+a'(x^{\nu}U^{\mu})^{2n}\right)$$

トナリ，而モ $U$ ト $x$, $u$ ノ關係ハ

$$U=u\sum_{jk}r_{jk}x^j u^k \qquad (r_{00}=1)$$

ナル形トナル。依ツテ (4) ヲ

$$(6)\quad x\frac{du}{dx} = \frac{u}{\mu}\left(-\nu + a(x^{\nu}u^{\mu})^{n} + a'(x^{\nu}u^{\mu})^{2n}\right)$$

トスルコトガ出來ル。コンデ $w = x^{\nu}u^{\mu}$ ト置ケバ (5) ヲ得ル。

故ニ (6) ノ解ハ $a' \neq 0$ ナラバ

$$u = x^{-\nu}\left(\frac{a'}{a}\alpha\left(-\frac{na^{2}}{a'}(\log x + c)\right)\right)^{-\frac{1}{n}},$$

$a' = 0$ ナラバ

$$u = x^{-\nu}(-na(\log x + c))^{-\frac{1}{n}}$$

トナリ、コレヲ (3) ヲ入レルコトニヨリ (1) ノ形式的ノ解ヲ得ル。

以上デ總ベテノ場合ニ形式的ノ解ヲ得タコトニナル。