675. 円,球ノ幾何ニツイテ

松村　宗治(台北大)

普通非ゆうくりっど幾何ノ研究ニ用ヒラルヽ方法ヲ吾々ノ場合ニ適用ショウト思フ。次ニコノ幾何ニツイテノ小注意ヲツケ加ヘル。

§ 1

三次元空間ニ於ケル球ガ *homogene Punktkoordinaten* x_k $(k=1,2,3,4)$ デ與ヘラレ其ノ方程式ヲバ普通ノヤウニ

(1) $$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = -x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$$

トシ、コレヲ

(2) $$(x_1+ix_3)(x_1-ix_3)-(x_0+x_2)(x_0-x_2)=0$$

トシ

(3) $$\frac{x_1+ix_3}{x_i-x_2}=\frac{x_0+x_2}{x_1-ix_3}=\lambda$$

(4) $$\frac{x_1-ix_3}{x_0-x_2}=\frac{x_0+x_2}{x_1+ix_3}=\mu$$

トオク、コヽニ λ, μ ハ Parameter, $i=\sqrt{-1}$ デアル、此ノトキ (3) ヨリ

$$(5)\quad -\lambda x_0 + x_1 + \lambda x_2 + i x_3 = 0,$$
$$x_0 - \lambda x_1 + x_2 + i\lambda x_3 = 0$$

トナリ、$\bar{\lambda}$ ヲ λ ノ代リニ i ヲ $-i$ トトリカヘテ

$$(6)\quad -\bar{\lambda} x_0 - x_1 + \bar{\lambda} x_2 - i x_3 = 0$$

トナリ、此等ノ式カラ例ノヨウニ

$$(7)\quad \begin{cases} \rho x_0 = i\,(\lambda\bar{\lambda}+1), \\ \rho x_1 = i\,(\lambda+\bar{\lambda}), \\ \rho x_2 = i\,(\lambda\bar{\lambda}-1), \\ \rho x_3 = (\lambda-\bar{\lambda}) \end{cases}$$

ヲ得。

§ 2

今吾々ハ

$$(1)\quad f \equiv (\alpha u)^2 - (\alpha\alpha)(uu)\cos^2\theta = 0$$

ヲ考ヘル、コヽニ α ハ R_2 ニオケル定円, θ ハ定角, R_2 ニオケル u ハ変円デアル。

サテ西内博士著（岩波講座）非ゆうくりっど幾何ヲ参照シテ y ヲ u ノ包絡線上ノ点トセバ

$$(2)\quad \begin{cases} (\alpha y) = (\alpha\alpha)(\alpha u)\sin^2\theta, \\ (yy) = (\alpha\alpha)(\alpha u)^2 \sin^2\theta \end{cases}$$

ガ成立チ

$$(3)\quad (\alpha y)^2 - (\alpha\alpha)(yy)\sin^2\theta = 0$$

トナル、サテ $\mathfrak{a}, \theta$; $\mathfrak{b}$, ϕ ハ與ヘラレタリトシ (3) ノ形ノモノヲ二ツ考ヘ

$$(4)\quad f \equiv (\mathfrak{a}\mathfrak{y})^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{a})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})\sin^2\theta = 0,$$

$$(5)\quad \varphi \equiv (\mathfrak{b}\mathfrak{y})^2 - (\mathfrak{b}\mathfrak{b})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})\sin^2\phi = 0$$

トシ

$$(6)\quad \lambda f + \mu \varphi = 0$$

ヲ考ヘル・コヽニ λ, μ ハ Parameter デアル、コノ時

$$(7)\quad \lambda : \mu = (\mathfrak{b}\mathfrak{b})\sin^2\phi : -(\mathfrak{a}\mathfrak{a})\sin^2\theta$$

トエラベバ (6) ヨリ

$$(8)\quad \begin{cases} \sqrt{(\mathfrak{b}\mathfrak{b})}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{y})\sin\phi - \sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{a})}\,(\mathfrak{b}\mathfrak{y})\sin\theta = 0, \\ \sqrt{(\mathfrak{b}\mathfrak{b})}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{y})\sin\phi + \sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{a})}\,(\mathfrak{b}\mathfrak{y})\sin\theta = 0 \end{cases}$$

ヲ得. (8) ハ

$$(9)\quad \begin{aligned} (\mathfrak{a}\mathfrak{y}) &= 0 \\ (\mathfrak{b}\mathfrak{y}) &= 0 \end{aligned}$$

ニヨリテ満足サレル。ツマリ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ナル二定円ニ垂直ナル円ニ向ッテ (8) ハ満足サレル。

尚 (8) ノ形ノ式三個ヲ考ヘテ非ゆうくりっど幾何ニ於ケルヤウニ論ゼラレル。

以上円ニツイテノベシガ R_3 内ノ球ニツイテモ同様デアル。

§ 3

R_2 内ニ二円 $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ガアッテ其ノ交点ヲ $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ トセバ

λ, μ ヲ Parameter トシテ $\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}$ ハ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ノ交点ヲ通ル円系ヲ表ハス，サテ

$$(\mathfrak{x}, \lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})^2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda+\mu\cos\phi & 0 & 0 \\ \lambda+\mu\cos\phi & \lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a^4\mu^2\sin^2\phi$$

ナルコトガ分ル、コヽニ a ハ $\mathfrak{p}$ ト $\mathfrak{q}$ トノ間ノ距離デアル、マタ ϕ ハ $\mathfrak{x}$ ト $\mathfrak{y}$ トノ間ノ角ヲ表ハス。

ツマリ

$$(1)\quad \left|(\mathfrak{x}, \lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})^2\right| = a^4\mu^2\sin^2\phi$$

サテ Blaschke：微分幾何 III，S. 72 ニヨレバ

$$(2)\quad \sin\tilde{\varphi} = \frac{|\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}|}{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})}$$

ガ分ッテイル、コヽニ $\tilde{\varphi}$ ハ $\mathfrak{x}$ ト $\mathfrak{y}$ トノ間ノ角デアル。

以上(1), (2) ヲ比較シテ ϕ ト $\tilde{\varphi}$ ノ間ノ関係ヲ求メルコトガ出来ル。

次ニ

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}}{(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q})}$$

ハ $\mathfrak{x}$ ト $\mathfrak{y}$ ガ直交スレバ常ニ点ヲアラハス。

ナゼナラバ

$$\mathfrak{z}^2 = 0$$

デアルカラデアル。

(1) ト全様ニシテ λ_i, μ_i ヲ Parameter トシテ

$$(3)\quad (\lambda_1\mathfrak{z}+\mu_1\mathfrak{y},\ \lambda_2\mathfrak{z}+\mu_2\mathfrak{y},\ \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m})^2$$
$$= -a^4\{(\lambda_1^2+\mu_1^2)+2\lambda_1\mu_1\cos\phi\}\{(\lambda_2^2+\mu_2^2)+2\lambda_2\mu_2\cos\phi\}$$
$$+a^4\{(\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2)+(\lambda_1\mu_2+\mu_1\lambda_2)\cos\phi\}\times\{(\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2)+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)\cos\phi\}$$

ノ成立ガ分ル。

次ニ

$$(4)\quad (\{\mathfrak{z}-\mathfrak{n}\}+i\{\mathfrak{y}-\mathfrak{m}\})^2 = 2i\{\cos\phi+a^2\}$$

ガ分ルカラ

$$(5)\quad \cos\phi=\frac{1}{2i}-a^2$$

ナルトキ $\{\mathfrak{z}-\mathfrak{n}\}+i\{\mathfrak{y}-\mathfrak{m}\}$ ハ円ヲアラハスコトニナル。

次ニ $\mathfrak{y}+i\mathfrak{z}$ ト $\mathfrak{z}+i\mathfrak{y}$ トノ間ノ角ヲ Φ トセバ

$$(6)\quad \cos\Phi=2i$$

ガ分ル。