679. 單純且ツ準單純ナ *Lie* 環ノ表現ノ *reduction* ニ就テ

吉田　耕作（阪大）

群 $\mathfrak{g}$ ノニツノ表現[1] $\mathfrak{A} : g \longrightarrow A_g$, $\mathfrak{B} : g \longrightarrow B_g$

---

(1) 簡單ノタメニ複素數体ニ於ケル表現ノミヲ考ヘル。

ガ與ヘラレ且ツ $\mathfrak{A}$ ガ *irreducible* トスル。表現論ニ於ケル大切ナ問題ノ一ツトシテ、$\mathfrak{L}$ ガ $\mathfrak{A}$ ニ *equivalent* ナ表現ヲ其ノ *irreducible* ナ *components* トシテ含ム *multiplicity* ヲ求ムルコトハ

i) *bounded representations* ノミヲ取扱ツテ居ルトキニハ J. von Neumann ノ概週期函數ノ理論ニヨリ、又

ii) $\mathfrak{G}$ ガ準單純ナ *Lie* 群デ、連続ナ表現ノミヲ取扱ツテ居ルトキニハ、H. Weyl ノ *unitarian trick* ニヨリ

何レモ *integral-mean* ノ方法ニヨツテ理論的ニハ完全ニ解決サレテ居ル。

Lie 群ノ連続表現ノミヲ取扱フ時ニハ —— 少クトモ準單純ナ *Lie* 群ノ場合ニハ —— *infinitesimal operators* ヲ用フル —— *differential method* ガアツテモヨサ相デアル。以下ニハ單純且ツ準單純ナ *Lie* 環 $\mathfrak{R}$ ノ表現ノ場合ノ一ツノ方法ヲ示シタイ。R. Brauer ノ論文（Math. Ann. 41, 3 (1936) p. 330—）ヘノ一ツノ *remark* デアリマス。

$\mathfrak{R}$ ノ *infinitesimal operators* ノ *base* ヲ $X_1, X_2, \text{------}, X_r$ トスル：

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ijk} X_k .$$

準單純ト云フコトハ

$$\det\|g_{ij}\| \neq 0, \quad g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{r} c_{ilk} c_{jkl}$$

ト同等デアル。

表現 $\mathfrak{A}: X_i \longrightarrow A_i$ ノ Grad ヲ n, 表現 $\mathfrak{B}: X_i \longrightarrow B_i$ ノ Grad ヲ m トスル。表現ト云フノハ上ノ對應ガ

$$X_i + X_j \longrightarrow A_i + A_j,$$
$$[X_i, X_j] \longrightarrow [A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i$$
$$\alpha X_i \longrightarrow \alpha A_i \quad (\alpha \text{ ハ複素數})$$

ナル如クナツテ居ルコトヲ意味スル。

Zero-representation (各 X_i = Zero-matrix ヲ對應サセル trivial representation) ヲ考ヘナイコトニスレバ; $\mathfrak{R}$ ガ單純ト云フコトカラ $\mathfrak{A}$ モ $\mathfrak{B}$ モ $\mathfrak{R}$ ニ同型デアル。A_i ノ transposed matrix A'_i ニ -1 ヲ乘ジタモノヲ A_i^* ト書ケバ $X_i \longrightarrow A_i^*$ モ亦 $\mathfrak{R}$ ノ表現ヲ與ヘル。之ヲ $\mathfrak{A}^*$ ト書ク。

定理。$\mathfrak{A}$ ガ irreducible ナトキ $\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{B}$ ノ irreducible component トシテ含マレル multiplicity ハ行列

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij} \{A_i^* \times E_m + E_n \times B_i\}\{A_j^* \times E_m + E_n \times B_j\}$$

$\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}$ ノ表現空間ノ Produktraum ノ vectors ヲ定メタ順序ニ並ベテ選イダトキノ Produkt.

ノ Eigenwert zero ノ multiplicity ニ等シイ。

コヽニ

$$\|g^{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1}.$$

又 X ハ Produktmatrix ヲ意味スル。[1] E_k ハ k次単位行列。

証明. $C_i = A_i \times E_m + E_n \times B_i$ ト置ケバ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ト共ニ $\mathfrak{C}: X_i \longrightarrow C_i$ ガ亦 R ノ表現ニナッテ居ル。R ガ準単純ダカラ $\mathfrak{C}$ ハ completely reducible (H. Weyl ノ定理)。[1] ヨッテ Brauer ノ Hilfssatz カラ直グワカル如ク問題ノ multiplicity ハ表現 $\mathfrak{C}$ ガ trivial representation $X_i \longrightarrow 0$ ヲ irreducible component トシテ含ム multiplicity ニ一致スル。此ノ multiplicity ヲ k トシ $\mathfrak{C}$ ヲ equivalent ナ

$$k\text{コ}\left\{\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right.\begin{Vmatrix} 0 &&&&&& \\ & 0 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& 0 &&& \\ &&&& \mathfrak{a}_1 && \\ &&&&& \mathfrak{a}_2 & \\ &&&&&& \ddots \\ &&&&&&& \mathfrak{a}_s \end{Vmatrix}$$

ニ transform スル。コヽニ $\mathfrak{a}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{a}_s$ ハ trivial

---

(1) Brauer ノ論文ハ実ハ準単純ナ Lie 環ノ表現ノ c.r. ノ algebraic proop ヲ目的トシタモノデアッタ —— Weyl ノ証明ハ unitarian trick ニヨル積分ノ方法ヲ用ヒル。

デナイ $\mathfrak{C}$ ノ irreducible components.

$\mathfrak{A}_t: X_i \longrightarrow A_{it}$ (Grad t) トスレバ (1) ハ

$$k_{\text{コ}}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots 0 & & & & \\ & & & M_1 & & & \\ & & & & M_2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & M_s \end{Vmatrix}\right.$$

ト ähnlich. $\quad M_t = \sum_{i,j=1}^{\nu} g^{ij} A_{it} A_{jt}$。

所が $\mathfrak{A}_t$ ハ $\mathfrak{R}$ ニ同型、従ツテ $\mathfrak{R}$ ト同ジ g^{ij} ヲモツコトト irreducibility カラ同ジク Brauer ノ Hilfssatz ニヨリ $M_t = \alpha_t E_t$ (E_t ハ t 次単位行列) $\alpha_t > 0$。

—— 以上 ——