704

~~674~~. Metric space ノ local property ニ就イテ

角谷　靜夫（阪大）

Locally compact metric space R ガ與ヘラレタトキ、R ノ metric ヲツケカヘテ R ヲ uniformly locally compact ニスルコトハ出來ナイデアロウカ？

即チ R ガ metric space デソノ metric ガ $d(x, y)$ デ與ヘラレテヰルトセヨ。R ガ locally compact デアルト云フノハ任意ノ R ノ点 a ニ對シテ $\delta = \delta(a) > 0$ ガ定マツテ $\overline{S(a, \delta)}$ ガ compact ニナルト云フコトデアル。但シ $S(a, \delta)$ ハ $d(a, x) < \delta$ ナル

Rノ点x全体ノ集合デ$\overline{S(a,\delta)}$ハソノclosureヲ表ハス。コヽニ$\delta=\delta(a)$ハ一般ニハaト共ニ変化スル量デaガRヲ動クトキノ$\delta(a)$ノ下限ハ0デアルカモ知レナイ。

コヽデ問題ニシヨウトスルノハRノmetric $d(x,y)$ヲソレトequivalentナ$d^*(x,y)$デオキカヘテ、コノ新シイmetric $d^*(x,y)$ニ對シテ$\delta^*>0$ヲ定メテ、$\overline{S^*(a,\delta^*)}$ガ$R$ノスベテノ点$a$ニ對シテ（同ジ$\delta^*$デ!）compactニナル様ニスルコトガ出来ルカト云フコトデアル。δ^*ガaニ無関係ト云フ所ガ問題ニナルノデアルカラ$\delta^*=1$トシテモヨイ。

同様ナ問題ハ他ノlocal propertyニ對シテモオコル。例ヘバlocal separabilityニ関シテハ如何? local connectednessニ関シテハ如何? local separabilityニ関シテハ既ニAlexandroff, Sierpinskiノ研究ニヨリRガmetric, locally separableデアレバRガopen且ツclosedナseparableナ部分R_αノ和ニ分レルコトガワカッテキルカラx,yガ同ジR_αニ属スルトキ$d^*(x,y)=\min(1,d(x,y))$、x,yガ異ルR_αニ属スルトキ$d^*(x,y)=1$トオケバヨイ。(1)

---

(1) P. Alexandroff:
Math. Ann., 92(19　)
W. Sierpinski: Sur les espaces métriques localement séparables,
Fund. Math., 21(1933)
角谷:
コノ結果ハ私ガSierpinskiノ論文ヲ知ラズニ出シタモノデアリマスガ、後デSierpinskiガ同ジ結果ヲ夙ニ出シテキルノヲ知リマシタ。

次ニRガ locally connected デアルトキハ任意ノ$x, y \in R$ニ對シテ$x, y \in E \subset R$ナル connected set Eヲ考ヘテカヽルアラユルEニ對スル$\delta(E)$ノ下限ト1トノ小サイ方ヲ$d^*(x, y)$トオケバヨイ。

但シ$\delta(E)$ハEノ diameter デ$x, y \in E$ナルトキノ$d(x, y)$ノ上限トシテ定義サレル。又特ニ$x, y \in E \subset R$ナル connected set Eガナイトキハ$d^*(x, y)=1$トオケバヨイ。先ヅ$d^*(x, y)$ガ metric ノ三ツノ Axiom ヲ満足スルコトハ殆ンド明カデアリ、コレガ$d(x, y)$ト equivalent デアルコトハRガ locally compact デアルコトカラ容易ニ得ラレル。コノ$d^*(x, y)$ニ對シテハ任意ノ$a \in R$及ビ$\delta^* \leqq 1$ニ對シテ$S^*(a, \delta^*)$シタガッテ$\overline{S^*(a, \delta^*)}$ガ connected ニナル。實際$x \in S^*(a, \delta^*)$ナラバ$a, x \in E_x \subset R$, $\delta(E_x) < \delta^*$ナル如キ connected set E_xガ存在シ且ツ任意ノ$y \in E_x$ハ$d^*(a, y) \leqq \delta(E_x) < \delta^*$ナル故$E_x \subset S^*(a, \delta^*)$. ヨッテ$S^*(a, \delta^*)$ハカヽル$E_x$ノ和デアルカラ connected.

次ニ locally compact ノ場合ニコノ問題ガ可能デアルコトヲ証明スルノデアルガ同様ノ方法デモウ少シ一般ナコトガ証明出來ルノデコノタメニ定理ヲ一般ノ形デ述ベテオク。

<u>定理1</u>　Pヲ hereditary ナ性質トスルトキ、若シ metric space Rガ locally ニ性質Pヲ満足シテオレバ(即チ任意ノ$a \in R$ニ對シテ$\delta = \delta(a) > 0$ガ定マリ

$S(a,\delta)$ガ性質PヲモツナラバRノmetric $d(x,y)$ヲコレトequivalentナ $d^*(x,y)$ デオキカヘテ、此クシテ得ラレタ $d^*(x,y)$ ニ對シテ $S^*(a,1)$ ガ任意ノ $a\in R$ ニ對シテ性質Pヲモツテヰルヤウニスルコトガ出來ル。

コヽニ一ツノ性質Pガhereditaryデアルト云フノハ一ツノ集合Eガ性質PヲモツトキEノ任意ノ部分集合 E_1 ガ又性質Pヲモツコトヲ云フ。例ヘバEノclosure $\bar{E}$（Rニ於ケルclosure!）ガcompactデアルト云フ性質ハhereditaryデアル。又Eノ濃度ガアルcardinal numberヨリ小サイト云フコト。Eガmetric separableデアルト云フコト・等モ同様ニhereditaryデアル。(2)

---

(2) Hausdorffノ第二可附番公理ヲ滿足スルト云フ性質ハhereditaryデアルガdenseナ可附番無限部分集合ヲ持ツト云フ性質ハhereditaryデハナイ!
實際 $|z|\leqq 1$ ナルアラユルcomplex numberノ集合Eヲ考ヘ、$|z_0|<1$ ナル点ノ近傍ハ普通ノ如ク $|z-z_0|<\varepsilon$ ニテ定義シ、$|z_0|=1$ ナル点ノ近傍ハ $E_z(|z-z_0|<\varepsilon,|z|<1)+(z_0)$ ニヨッテ定義スレバEハdenseナ可附番無限集合ヲモツガ、$|z|=1$ ナル点全体ヨリナルEノ部分集合 E_1 ハモハヤカヽル性質ヲモタナイ。
$E\subset H\subset R$ ナルconnected set Hガ存在スルト云フEノ性質ハhereditaryデアルガコレニヨッテlocal connectednessヲ定義スルコトハ出來ナイ!

定理1ヲ証明スルタメニ先ヅRノ各点 a ニ對シテ $S(a,\delta)$ ガ性質 P ヲ持ツ如キ $\delta=\delta(a)$ ノ上限 $r(a)$ ヲ考ヘル。$r(a)$ ガ少クトモ一ツノ点 a ニテ ∞ トナレバ他ノ点ニテモ ∞ トナルノデアルカラ、コノトキハ $d^*(x,y)=d(x,y)$, $\delta^*=1$ トオケバ $S^*(a,\delta^*)$ ハ任意ノ $a\in R$ ニ對シテ性質 P ヲモツ。ヨツテ R ノ各点ニテ $r(a)<\infty$ ト假定シテモ差支ナイ。

コノ $r(a)$ ガ a ノ連續函数デシカモ

$$|r(a)-r(b)|\leqq d(a,b) \tag{1}$$

ヲ滿足シテ井ルコトハ殆ンド明カデアロウ。

此ノ如ク考ヘレバ定理1ヲ証明スルニハ次ノ定理2ヲ証明スレバ十分ナコトガワカル。

<u>定理2</u> *Metric space* R（ソノ *metric* $d(x,y)$）ノ各点 a ニ對シテ $0<r(a)<\infty$ ナル $r(a)$ ガ定マリコレガ條件(1)ヲ滿足シテ居レバ $d(x,y)$ ト *equivalent* ナ *metric* $d^*(x,y)$ ヲ適當ニトツテ任意ノ $a\in R$ ニ對シテ

$$S^*(a,1)\subset S\left(a,\frac{r(a)}{2}\right)$$

トナル様ニスルコトガ出來ル。[(3)]

証明ハ二通リアル。何レモ方法トシテ興味ガアルカラニツトモ記スコトニスル。

---

(3) $S(a,r(a))$ ヲ考ヘズニ $S\left(a,\frac{r(a)}{2}\right)$ ヲ考ヘタノハ $S(a,r(a))$ ガ必ズシモ性質 P ヲモタヌカラデアル。($d<r(a)$ ナラバ $S(a,d)$ ハ性質 P ヲモツ!)

第一法: R ノ二点 a, b ガ $d(a, b) < r(a)$, $d(a, b) < r(b)$ ヲ満足スルトキ a, b ハ"十分近イ"ト呼ビ $a * b$ ニテコノ関係ヲ表ハス。[4] $a * a$ ナルコトハ明カ。
又 $a * b$ ナラバ $b * a$ デアル。シカシ $a * b$, $b * c$ デモ必ズシモ $a * c$ トハナラナイ。a ヲ定メタトキ $a * b$ ナル b 全体ノ集合 $U^*(a)$ ハ a ヲ内点トシテ含ム集合デアル。[5] 実際. $S(a, \frac{1}{2} r(a)) \subset U^*(a)$ ガ成立スル。何トナレバ $x \in S(a, \frac{1}{2} r(a))$ ナラバ $d(a, x) < \frac{1}{2} r(a) < r(a)$，又(1)ヨリ $r(x) \geqq r(a) - d(a, x) > 2d(a, x) - d(a, x) = d(a, x)$ ヨッテ $a * x$, $x \in U^*(a)$.

次ニ R ノ二点 a, b ニ対シテ $a * a_1$, $a_1 * a_2, \cdots\cdots, a_n * b$ ナル如キ有限個ノ R ノ点 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ガ存在スルトキ a, b ハ"相繋ガル"ト呼ビ $a ** b$ ニテコノ関係ヲ表ハス. $a * b$ ナラバ $a ** b$ デアル，又 $a ** b$ ナラバ $b ** a$ デアリ、$a ** b$, $b ** c$ ナラバ $a ** c$ デアル。a ヲ定メタトキ $a ** b$ ナル b 全体ノ集合 $U^{**}(a)$ ハ a ヲ含ム open 且ツ closed ナ集合デアル。先ヅ $U^{**}(a)$ ガ open ナルコトハ $b \in U^{**}(a)$ ナラバ $S(b, \frac{1}{2} r(b)) \subset U^*(b) \subset U^{**}(a)$

---

(4) コレハ W. Sierpinski ノ考ヘヲ用ヒタ。

W. Sierpinski: *Sur les espaces métriques localement séparables*, Fund. Math., 21(1933)

(5) 実際ハ $U^*(a)$ 自身ガ開集合ニナルコトモ容易ニ証明出来ルノデアルガコレハ直接必要デハナイ。

ナルコトヨリ容易ニワカル。($U^*(b) \subset U^{**}(a)$ ナルコトハ $a**b$, $b*c$ ナラバ $a**c$ トナルコトヨリ明カ)。次ニ $U^{**}(a)$ ガ closed ナルコトヲ云フタメニハ R ガ互ニ共通点ノナイ open set $U^{**}(a)$ ノ和トナルコトヲ示セバヨイ。コノタメニハ任意ノ a, b ニ對シテ $U^{**}(a) = U^{**}(b)$ トナルカ又ハ $U^{**}(a) \cdot U^{**}(b) = 0$ トナルコトヲ示セバヨイ。然ルニ實際 $c \in U^{**}(a) \cdot U^{**}(b)$ ナラバ $a**c$, $c**b$ トナリコレヨリ $a**b$, $U^{**}(a) = U^{**}(b)$ ヲ得ルカラコレハ明カデアル。

此ノ如ク R ハ互ニ共通点ノナイ open 且ツ closed ナ集合 U^{**} ノ和トナツタノデアルカラコノ各々ノ U^{**} ニ對シテ所要ノ條件ヲ滿足スル metric $d^*(x, y)$ ガ定義サレレバヨイ。$d^*(x, y)$ ハ ≤ 1 ナル如ク取ルコトガ出來ルカラ(6) x, y ガ異ル U^{**} ニ屬スルトキ $d^*(x, y) = 1$ トオケバヨイノデアル。

次ニ一ツノ U^{**} 内ニテ所要ノ條件ヲ滿足スル $d^*(x, y)$ ヲ定義シヨウ。

任意ノ $x, y \in U^{**}$ ニ對シテ $x * a_1$, $a_1 * a_2$, ..., $a_n * y$ ナル如キ $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ガアルカラコノ $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ニ對シテ

$$d^*(x, y) = 3 \cdot \text{untere Grenze} \sum_{i=0}^{n} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))} \qquad (2)$$

---

(6) $d^*(x, y) > 1$ ナラバ $d^*(x, y) = 1$ トオキカヘル!

トオリ。但シ $a_0=x,\ a_{n+1}=y$ トオイタ。又 Untere Grenze ハカヽルアラユル $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ ニ對スル下限ヲ取ルモノトスル。

此ノ如ク定義サレタ $d^*(x,y)$ ガ

$$d^*(x,y)=d^*(y,x)\geqq 0$$

$$d^*(x,y)+d^*(y,z)\geqq d^*(x,z)$$

ヲ滿足スルコトハ明カデアルカラ

$$x\neq y \longrightarrow d^*(x,y)>0 \qquad (3)$$

$$d^*(x,y)<1 \longrightarrow d(x,y)<\frac{1}{2}r(x) \qquad (4)$$

$$\lim_{n\to\infty} d^*(x,y_n)=0 \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x,y_n)=0 \qquad (5)$$

ヲ滿足シテヰルコトヲ證明スレバヨイ。コノタメニハ

$$d(x,y)<\frac{1}{2}r(x) \longrightarrow d^*(x,y)\leqq \frac{3\,d(x,y)}{r(x)-d(x,y)} \qquad (6)$$

$$d^*(x,y)\geqq \min\left(1,\ \frac{2}{r(x)}d(x,y)\right) \qquad (7)$$

ヲ證明スレバ十分デアル。何トナレバ

(3): $x\neq y \longrightarrow d(x,y)>0$, (7) ヨリ $d^*(x,y)>0$

(4): $d^*(x,y)<1$ ナラバ (7) ヨリ $\frac{2}{r(x)}d(x,y)<1$,

$$d(x,y)<\frac{1}{2}r(x)$$

(5): $\lim\limits_{n\to\infty} d^*(x,y_n)=0$ ナラバ十分大キイ n ニ對シテ

$d^*(x,y_n)<1$

ヨッテカヽル n ニ對シテ (7) ヨリ $\frac{2}{r(x)}d(x,y_n)<d^*(x,y_n)$,

$$d(x,y_n)<\frac{r(x)}{2}\cdot d(x,y_n)\to 0$$

逆ニ $\lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = 0$ ナラバ十分大キイ n ニ對シテ

$$d(x, y_n) < \frac{1}{2} r(x)$$

ヨッテカヽル n ニ對シテ (6) ヨリ

$$d^*(x, y_n) \leqq \frac{3\, d(x, y_n)}{r(x) - d(x, y_n)} \longrightarrow 0$$

(6) ノ證明: $d(x, y) < \frac{1}{2} r(x)$ ナル故 $x \neq y$。ヨッテ (2) ニ於テ $n=1$, $a_1 = y$ トオケバ

$$d^*(x, y) \leqq \frac{3\, d(x, y)}{\min(r(x), r(y))} \leqq \frac{3\, d(x, y)}{r(x) - d(x, y)}$$

(7) ノ證明: $d(x, a_i) < \frac{1}{2} r(x)$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ナラバ

$$r(a_i) \leqq r(x) + d(x, a_i) < \frac{3}{2} r(x)$$
$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ヨッテ

$$3 \sum_{i=0}^{n} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))} \geqq 3 \cdot \frac{2}{3\, r(x)} \sum_{i=0}^{n} d(a_i, a_{i+1})$$
$$\geqq \frac{2}{r(x)} d(x, y)$$

又 $d(x, a_i) \geqq \frac{1}{2} r(x)$ ナル a_i ガアレバソノ最初ノモノヲ a_{p+1} トオク。

$$(0 \leqq p \leqq n) \qquad r(a_i) \leqq r(x) + d(x, a_i) < \frac{3}{2} r(x)$$
$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, p)$$

故ニ

$$3 \sum_{i=0}^{n} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))} \geqq 3 \sum_{i=0}^{p} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))}$$

$$\geqq 3 \cdot \frac{2}{3\, r(x)} \sum_{i=0}^{p} d(a_i, a_{i+1}) \geqq \frac{2}{r(x)} d(x, a_{p+1})$$

$$\geqq \frac{2}{r(x)} \cdot \frac{r(x)}{2} = 1$$

第二法： コレハ直接ニ $d^*(a, b)$ ヲ定義スル方法デアル。先ヅ $d(a, b) \leqq 1$, $r(a) \leqq 1$ ガ任意ノ $a, b \in R$ ニ對シテ成立スルト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。[7] コノ $d(a,b)$, $r(a)$ ヲ用ヒテ

$$d^*(a, b) = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{r(a)^2} + \frac{1}{r(b)^2} - \frac{2\cos d(a, b)}{r(a)\, r(b)}} \tag{8}$$

トオク。コノ $d^*(a, b)$ ガ求ムル *metric* デアルコトヲ證明シヨウ。先ヅ $d^*(a, b)$ ガ距離ノ三ツノ *axioms* ヲ滿足スルコトヲ示スニハ三角形ノ關係ガ成立スルコトダケヲ示セバヨイ。コレハ直接計算ニヨツテモ容易ニタシカメラレルガ次ノ樣ニ考ヘルノモ面白イデアロウ。

a, b, c ヲ R ノ任意ノ三点トセヨ。*Euclid* ノ三次元空間 R^3 内ニ原点 O ヲ中心トスル半徑 1 ノ球面 S ヲ考ヘル。球面 S 上ニ三点 A, B, C ヲ $\widehat{AB} = d(a, b)$, $\widehat{BC} = d(b, c)$, $\widehat{AC} = d(a, c)$ ガ成立スル樣ニトル。コヽニ $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ ハ夫々 A, B; B, C; A, C ヲ通ル大円ノ劣弧ノ長サデアル。此ノ如キ三点ヲ取ルコトガ出來ルコトハ $d(a, b) + d(b, c) \geqq d(a, c)$ ニテ且ツ $d(a, b)$, $d(b, c)$, $d(a, c) \leqq 1$ トナツテキルコトヨリ明カデアル。

---

(7) $d(a, b) > 1$, $r(a) > 1$ トナルトキニハ $d(a, b) = 1$, $r(a) = 1$ トオキカヘレバヨイ。

次ニ OA, OB, OC ヲ延長シテ、ソノ延長上ニ A^*, B^*, C^* ヲ夫々 $\overline{OA^*}=\dfrac{4}{r(a)}$, $\overline{OB^*}=\dfrac{4}{r(b)}$, $\overline{OC^*}=\dfrac{4}{r(c)}$ トナル様ニトル。$r(a), r(b), r(c)\leqq 1$ デアルカラ A^*, B^*, C^* ハ球外ノ点デアル。コノ A^*, B^*, C^* ニ對シテ

$$d^*(a,b)=\overline{A^*B^*},\quad d^*(b,c)=\overline{B^*C^*},\quad d^*(a,c)=\overline{A^*C^*}$$

トナルコトハ d^* ノ定義ヨリ明カデアル。ヨッテ三角形ノ關係

$$d^*(a,b)+d^*(b,c)\geqq d^*(a,c)$$

ガ成立スルコトハ明カデアル。

次ニ $d^*(a,b)$ ガ $d(a,b)$ ト equivalent ナ metric デアルコトハ $d^*(a,b)$ ノ定義 (8) カラ容易ニ計算ニヨッテ示スコトガ出來ルガ次ノ如ク考ヘルコトモ出來ル。上記ノ如ク O, A, B, A^*, B^* ヲトレバ

$$d^*(a,b)=\overline{A^*B^*}\geqq\overline{OA^*}\cdot\sin AOB$$

$$=\frac{4}{r(a)}\cdot\sin d(a,b)\geqq\frac{4}{r(a)}\cdot\frac{d(a,b)}{2}=\frac{2}{r(a)}\cdot d(a,b)\cdots\cdots(9)$$

又、OB^* 上又ハソノ延長上ニ A' ヲ $\overline{OA'}=\overline{OA^*}$ ナル如クトレバ

$$d^*(a,b)=\overline{A^*B^*}\leqq\overline{A^*A'}+\overline{A'A^*}=4\cdot\frac{1}{r(a)}\cdot 2\sin\frac{d(a,b)}{2}$$

$$+4\left|\frac{1}{r(a)}-\frac{1}{r(b)}\right|\leqq\frac{4}{r(a)}\,d(a,b)+\frac{4d(a,b)}{r(a)\cdot r(b)}$$

$$\leqq\frac{4d(a,b)}{r(a)}\left\{1+\frac{1}{r(a)-d(a,b)}\right\}\cdots\cdots\cdots(10)$$

(9), (10) ヨリ $d^*(a, b)$ ト $d(a, b)$ トガ equivalent ナコトガワカル。又 (9) ヨリ $d^*(a, b) < 1$ ナラバ $d(a, b) < \frac{1}{2} r(a)$ ナルコトヲ得ルカラ定理ノ証明ハ完結スル。（証明終）

コレデ我々ノ問題ハ一先ヅ解決ガツイタノデアルガ次ニ local completeness ヲ問題トシヨウ。上記ノ定理ニヨレバ metric space R ガ locally complete デアレバ適當ニ metric ヲカヘレバ uniformly locally complete ニナルヤウニ思ハレルガ、completeness ヲ定義スル fundamental sequence ソノモノガ metric ニヨツテ定義サレテヰルノデアルカラ d^* ニ関スル fundamental sequence ハ d ニ関スル fundamental sequence ニナツテヰナイカモ知レナイト云フオソレガアル。ヨツテ問題ハ困難トナル。シカシ實際 d^* ニ関スル fundamental sequence ガ d ニ関スル fundamental sequence ニナツテヰルコトガ証明出來ルカラ R ハ d^* ニ関シテ uniformly complete ニナル。

次ニコレヲ証明シヨウ。$\{x_n\}$ ガ d^* ニ関スル fundamental sequence デアレバ適當ニ n_0 ヲトレバ $d^*(x_{n_0}, x_n) < 1$ ガ $n \geqq n_0$ ニ對シテ成立スル。ヨツテ (7) 又ハ (9) ヨリ

$$d(x_{n_0}, x_n) \leqq \frac{r(x_{n_0})}{2} d^*(x_{n_0}, x_n) < \frac{1}{2} r(x_{n_0})$$

トナル。故ニ再ビ (7) 又ハ (a) ニヨリ $m, n \geqq n_0$ ニ對シテ

$$d(x_m, x_n) \leqq \frac{r(x_n)}{2} d^*(x_m, x_n)$$

$$\leqq \frac{r(x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_n)}{2} d^*(x_m, x_n)$$

$$< \frac{3}{4} \cdot r(x_{n_0}) \cdot d^*(x_m, x_n)$$

ガ成立スル。ヨッテ $\{x_n\}$ ハ d ニ関シテ fundamental sequence トナリ R ガ d ニ関シテ locally complete (ソノ半径ノ上限 $r(x)$!) ナルコトニヨリ、アル $x_0 \in R$ ガ存在シテ $d(x_n, x_0) \to 0$. ヨッテ又 $d^*(x_n, x_0) \to 0$. 故ニ R ハ d^* ニ関シテ Uniformly locally complete デアル。

コヽデ注意シタイコトハ R ガアル metric d^* ニ関シテ uniformly locally complete デアレバ R ガ d^* ニ関シテ complete ニナルコトデアル。(コノコトハ殆ンド説明スルマデモナイ)。ヨッテ結局、metric space R ガ locally complete デアレバ R ノ metric ヲ適当ニツケカヘレバ R ガ complete ニナルコトガワカッタ。

最後ニ locally compact metric space R ガ與ヘラレタトキ、R ノ metric d ヲソレト equivalent ナ d^* デオキカヘテ R ノ任意ノ点 a 及ビ任意ノ正数 M ニ對シテ $\overline{S^*(a, M)}$ ガ compact ニナル様ニスルコトガ出來ナイカ、ト云フコトヲ考ヘル。

コレガ可能デアルタメニハ R ハ separable デナケレバ

ナラナイ。シカモ逆ニ R ガ separable ナラバコレハ常ニ可能デアル。コレヲ證明スルニハ次ノ Alexandroff-Urysohn ノ定理[8]ヲ用フレバヨイ。

定理：locally compact, separable ナ Hausdorff 空間ハコレニ一点ヲツケ足シテ compact ニスルコトが出來ル。

R ニ一点 ∞ ヲツケ足シテ compact, separable ナ空間 R^* ヲ作ッタトセヨ。R^* ハ metrisable デアル。コノ metric ヲ d トスレバ R ノ任意ノ二点 a, b ニ對シテ $d^*(a, b)$ ハ

$$d^*(a, b) = d(a, b) + \left| \frac{1}{d(a,\infty)} - \frac{1}{d(b,\infty)} \right|$$

ニヨッテ定義サレル。コレが所要ノ性質ヲモツコトハ容易ニタシカメルコトが出來ル。

同様ナコトハ hereditary デ且ツ finite additive ナ性質 P ニ對シテモ成立スル。但シ性質 P が finite additive デアルト云フノハ $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ が各々性質 P ヲモテバ $E_1 + E_2 + \cdots\cdots + E_n$ モ亦ノ性質 P ヲモツコトヲ云フ。

定理3　P ヲ hereditary 且ツ finite additive ナ性質トスルトキ若シ metric space R が separable

---

(8) P. Alexandroff et P. Urysohn: Memoire sur les espaces compactes, Verh. Vet. Amsterdam (1929)

デ且ツ *locally* ＝性質Pヲ満足シテ居レバ R ノ metric d ヲコレト equivalent ナ d^* デオキカヘテ、此クシテ得ラレタ d^* ＝對シテ $S^*(a, M)$ ガ任意ノ $a\in R$ 及ビ任意ノ正數 M ＝對シテ性質Pヲモツテヰルヤウ＝スルコトガ出來ル。

證明： R ノ各点 a ＝對シテ $r(a)$ ヲ定理1ノ場合ト同樣＝定義スル。$r(a)$ ガ少クトモ一ツノ点 a ＝テ ∞ トナルトキハ定理ハ明カデアルカラ R ノ各点＝テ $r(a)<\infty$ ト假定スル。定理3ヲ證明スル＝ハ次ノ定理4ヲ證明スレバ十分デアル。

<u>定理4</u> separable metric space R（ソノ metric $d(x, y)$）ノ各点 a ＝對シテ $r(a)>0$ ガ定義サレタトキハ R ノ metric $d(x, y)$ ヲソレト equivalent ナ $d^*(x, y)$ デオキカヘテ、任意ノ $a\in R$ 及ビ任意ノ正數 M ＝對シテ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\in R$ ガ定マツテ

$$S^*(a, M)\subset\sum_{i=1}^{n} S(a_i, \alpha_i r(a_i)), \quad 0<\alpha_i<1 \qquad (11)$$

トナル樣＝スルコトガ出來ル。但シ S, S^* ハ夫々 metric d, d^* ＝關スル sphere ヲ表ハス。

證明： R ノ各点 a ＝對シテ $S(a, \frac{1}{2}r(a))$ ヲ考ヘル。R ハ separable デアルカラ a_n $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ適當＝トレバ

$$R=\sum_{n=1}^{\infty} S(a_n \tfrac{1}{2} r(a_n))$$

トナル。今

$$D_n=\sum_{i=1}^{n} S\left(a_i, \left(1-\frac{1}{2^i}\right) r(a_i)\right) \quad n=1,2,\cdots\cdots$$

ヲ考ヘレバ $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ニテ且ツ $R=\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ デアル。

ヨツテ $x \in D_1$ ナルトキ $f(x)=1$, $x \in D_n-\overline{D_{n-1}}$ ナルトキ $n-1 \leqq f(x) \leqq n$ ナル如キ R デ定義サレタ連続函數 $f(x)$ ガ存在スル。今 $f_n(x)=max(n, f(x))$ トオキ

$$d^*(x, y)=d(x, y)+\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)-f_n(y)\right| \cdots\cdots\cdots (12)$$

トオケバコレガ求ムル d^* デアル。

先ヅ (12) ノ右辺ノ無限級數ガ x, y ヲ定メレバ有限デ切レルコトヲ注意シヨウ。ソレハ x, y ヲ定メルト十分大キイ n ニ對シテ $x, y \in D_n$ トナリ、$f_n(x) \equiv n$, $x \in D_n$ デアルカラ $f_n(x)=f_n(y)$ トナルカラデアル。$d^*(x, y)$ ガ metric ノ三ツノ axiom ヲ満足スルコト及ビ $d(x, y)$ ト equivalent ナ metric デアルコトハ殆ンド明カデアル。

次ニ (11) ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。a ヲ R ノ任意ノ点トスレバ $R=\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ ナルコトヨリ $a \in D_{n_0}$ ナル n_0 ガ定マル。ヨツテ $x \in S^*(a, M)$ トスレバ $d^*(a, x)<M$ デアルカラ (12) ヨリ

$$\left|f_{n_0}(a)-f_{n_0}(x)\right| \leqq d^*(a, x)<M$$

$a \in D_{n_0}$ デアルカラ $f_{n_0}(a) = n_0$.

ヨッテ

$$f_{n_0}(x) < n_0 + M$$

故ニ

$$x \in D_{n_0+M} = \sum_{i=1}^{n_0+M} S_i\left(a_i, \left(1-\frac{1}{2^i}\right) r(a_i)\right)$$

ヨッテ $\alpha_i = 1 - \frac{1}{2^i}$ トオケバ (11) ガ成立スル。 (証明終)