705
~~675~~. Projektionsspekturm ノ一性質ト Hopf ノ Erweiterungssatz.

小平　邦彦（東大）

§1. Projektionsspekturm ト Kuratowski ノ Abbildung.

Kompaktum F ノ abg. Überdeckung ヲ $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ ノ Nerv ヲ K トシ, K ノ Eckpunkt a ニ對應スル $\mathfrak{U}$ ノ Element ヲ F^a デ現ハス. 開集合 $G^a \supset F^a$ ヲ充分小サクトレバ, offene Überdeckung $\{G^a\}$ ノ Nerv ハ K ト一致スル。$\{G^a\}$ ニ關スル Kuratowski ノ Abbildung ヲ κ トスレバ, κ ハ F ヲ Polyeder $\overline{K}$ ニ abbilden スル連續ナ Abbildung デアッテ, $p \in F$ ガ F^a ニ含マレルナラバ, a ハ $\kappa(p)$ ノ K ニ於ケル Träger-simplex ノ Eckpunkt デアル。[1] ソコデ一般ニ

定義. $k(F) \subset \overline{K}$ ナル連續ナ Abbildung k ガ，„$p \in F^a$ ナラバ a ハ $k(p)$ ノ Träger ノ Eckpunkt デアル" ナル條件ヲ滿足スルトキ，k ヲ廣義ノ Kuratowski ノ Abbildung トイフ。

Kompaktum F ノ Projektionsspekturm ヲ

$$(K_1, K_2, \cdots K_m, \cdots) \qquad K_m = \pi_m^{m+1}(K_{m+1})$$

トスル。K_m ニハ K_m ヲ Nerv トスル F ノ abg. Überdeckung $\mathfrak{U}_m$ ガ對應スル。K_m ノ Eckpunkt a ニ對應スル $\mathfrak{U}_m$ ノ Element ヲ添數 m ノ附ケテ F_m^a デ現ハス。然ルトキ次ノ定理ガ成立ツ：

定理 I. k_m ヲ $\mathfrak{U}_m$ ニ關スル廣義ノ Kuratowski ノ Abbildung トスル。

$$Z = (z_1, z_2, \cdots\cdots z_m \cdots\cdots), \qquad z_m \in K_m$$

ヲ F ノ Projektionszyklus トスレバ，

$$k_m(Z) \backsim z_m \quad \text{in } \overline{K}_m$$

証明：

1) K_m ノ Eckpunkt a ニ對シテ，F_m^a ノ任意ノ点ヲ一ツ定メテ，ソレヲ $\gamma(a)$ デ現ハス。K_m ノ各 Eckpunkt a ヲ夫々 $\gamma(a)$ デ置換ヘレバ "$\mathfrak{U}_m$ 内ニ実現サレタ Nerv" $\gamma(K_m)$ ガ得ラレル。$\gamma(K_m)$ ト K_m ハ必ズシモ isomorph デハナイガ γ ハ K_m'' ヲ $\gamma(K_m)$ ニ simplizial ニ abbilden スル。

$Z = (z_m)$ ガ Projektionszyklus ナルトキ，$\gamma(Z) = (\gamma(z_m))$ ハ F ノ konvergenter Zyk-

---

1) Alexandroff und Hopf: Topologie, S 366.

lus デアッテ, $Z \to r(Z)$ ナル abbildung ニヨッテ, Projektionszyklus デ定義サレタ Betti 群ト, konvergenter Zyklus デ定義サレタ Betti 群ガ isomorph ニナル。

2) $Z=(z_m)$ ヲ Polyeder $\overline{K}$ ニ於ケル konvergenter Zyklus トスルトキ, K ニ関スル kanonische Verschiebung ヲ φ トスレバ, $\varphi(z_m) \in K$ ハ, 或 m カラ先スベテ homolog トナル。コノ $\varphi(z_m)$ ノ Homologie klass ヲ $\varphi(Z)$ デ表ハスコトニスレバ, $Z \to \varphi(Z)$ ナル對應ニヨッテ, $\overline{K}$ ノ konvergenter Zyklus ニヨッテ定義サレタ Betti 群ト Komplex K ノ Betti 群ガ isomorph ニナル。

3) $f(F) \subset F'$ ナル連続ナ Abbildung f ガ與ヘラレタトキ, $Z=(z_m)$ ヲ F ノ konvergenter Zyklus トスレバ, $f(Z)=(f(z_m))$ ハ F' ノ konvergenter Zyklus デアッテ, $Z \to f(Z)$ ナル Abbildung ニヨッテ F ノ Betti 群ガ F' ノ Betti 群ニ homomorph ニ abbilden サレル。

コノ f ニヨッテ生ズル Homomorphismus ヲ h_f, 或ハ單ニ f デ現ハス。定理 1 ニ於ケル k_m ハ, h_{k_m} ノ意味デアッタ。スナハチ

$$h_{k_m}(Z) \sim z_m \quad \text{in} \quad \overline{K}_m$$

コレヲ, 1), 2) ニヨッテ詳シク書ケバ

$$\varphi_m k_m\, r(Z) \sim z_m \quad \text{in} \quad K_m$$

スナハチ，m ニヨツテ定マル。$l_0=l_0(m)$ ガアツテ，

(A) $\quad g_m k_m r(\xi_l) \infty \xi_m$ in K_m, $\quad l \geqq l_0$

(A) ノ証明：　K_m ニ對シテ，$\sigma>0$ ヲ充分小サクトツテ，K_m ノ各 Simplex x ニツイテ，x ニ含マレナイ Eckpunkt a ヲ中心トスル Baryzentrische Stern B_a ト $\bar{x}$ ノ距離ガ σ ヨリ大キイ様ニスルコトガ出來ル：　$a \notin \bar{x}$ ナラバ $\rho(\bar{x}, B_a)>\sigma$. (A. u. H. Topologie S 351)

次ニ $l_0=l_0(m)$ ヲ充分大キクトツテ，$l \geqq l_0$ ナルスベテノ l ニツイテ，$\delta\left(k_m\left(F_l^a\right)\right)<\delta$ ナル如クスル。

然ルトキハ，$p \in F_l^a$ ナラバ，$g_m k_m r(a)$ ハ $k_m(p)$ ノ Träger-simplex ノ Eckpunkt デアル．何トナレバ，p, $r(a)$ ハ共ニ F_l^a ニ含マレルカラ，$\rho\left(k_m(p), k_m r(a)\right)<\sigma$. 故ニ，$k_m(p)$ ノ Träger-simplex ヲ $x(p)$ デ表ハスコトニスレバ，$\rho\left(\overline{x(p)}, k_m r(a)\right)<\sigma$. 故ニ σ ノ定義ニヨツテ，

$g_m k_m r(a) \subset x(p)$. 又 $p \in F_l^a$ ナルトキハ，勿論 $F_m^{\pi_m(a)} \ni p$ デアルカラ，定義ニヨツテ，$\pi_m(a) \subset x(p)$ デアル。

K_l ノ上デ π_m^l ニ關シテ作ツタ Prism $\pi(K_l)$ ヲ考ヘル．(A. u. H. Topologie, S 198). $\pi(K_l)$ ノ Simplex ハスベテ K_l ノ Simplex $(a_0\ a_1 \cdots\cdots a_n)$ カラ作ラレタモノデ，$(\pi_m(a_0) \cdots\cdots \pi_m(a_h), a_h \cdots\cdots$

a_n) ナル形ヲモツ. コノトキ, $F_l^{a_j}$ ハ一点 p ヲ共有スルカラ, 上ニ述ベタ如ク, $\pi_m(a_j)$, $\varphi_m \kappa_m r(a_j)$ ハスベテ. K_m ニ於ケル $\kappa_m(p)$ ノ Träger $x(p)$ ノ Eckpunkt デアル. 故ニ ψ ナル Abbildung ヲ

$$\psi(\pi_m(a_0)\cdots\cdots, \pi_m(a_k), a_k\cdots\cdots a_n)$$
$$=(\pi_m(a_0)\cdots\cdots\pi_m(a_k), \varphi_m \kappa_m r(a_k)\cdots\cdots\varphi_m \kappa_m r(a_n))$$

デ定義スレバ, ψ ハ $\Pi(K_l)$ ヲ K_m ニ abbilden スル simpliziale Abbildung デアッテ, K_l デハ $\varphi_m \kappa_m r$ ト一致シ, K_m デハ identische Abbildung デアル。

然ルニ

$$z_l \sim \pi_m^l(z_l) \quad \text{in } \Pi(K_l)$$

故ニ

$$\psi(z_l) \sim \psi\pi_m^l(z_l) \quad \text{in } K_m$$

$\psi(z_l)=\varphi_m \kappa_m r(z_l)$, $\psi\pi_m^l(z_l)=\pi_m^l(z_l)$ デアルカラ

$$\varphi_m \kappa_m r(z_l) \sim \pi_m^l(z_l) \sim z_m \quad \text{in } K_m$$

コレデ (A) が証明サレタ。　　(定理1ノ証明終リ)

§2. Hopf ノ Erweiterungssatz.

定理2. (Erweiterungssatz). F ヲ $n+1$ dim. Kompaktum, $F' \subset F$ ヲソノ任意ノ Teilkompaktum トシ, 人 $\mathfrak{K}$ ヲ mod. 1 デ reduzieren サレタ実数ノ加法群トスル, F' ヲ n-dim. Sphäre S^n ニ

abbilden スル連続ナ Abbildung f ガ與ヘラレタトキ, Koeffizientenbereich $\mathfrak{K}$ ニ関シテ, 條件:

(B) $Z^n \subset F'$, $Z^n \sim 0$ in F ナラバ $f(Z^n) \sim 0$ in S^n. ガ成立スルナラバ, f ハ F ヲ S^n ニ abbilden スル連続ナ Abbildung ニ拡張サレル。

K' ガ K^{n+1} ノ Teilkomplex, $F=\overline{K}$, $F'=\overline{K'}$ ナルトキ, Erweiterungssatz ガ成立スルコトハヨク知ラレテヰル. (A. u. H.: Topologie, S. 500; 或ハ H. Freudenthal: Hopfsche Gruppe. Compositio Math. 4. 等). コレヲ Satz 1 ヲ應用シテ Kompaktum ノ場合ニ擴張スル。

F^{n+1} ノ Projektionsspekturm ヲ (K_m^{n+1}), K_m^{n+1} ニ對應スル Überdeckung ヲ $\mathfrak{U}_m = \{F_m^a\}$ トスレバ, $F_m^a \cdot F' \neq 0$ ナル $F_m^a \cdot F'$ ノ全体ハ F' ノ abg. Überdeckung ヲナシ, ソノ Nerv K_m' ハ K_m^{n+1} ノ Teilkomplex デアッテ, (K_m') ハ F' ノ Projektionsspekturm ヲナス. 今 F_m^a ヲ含ム開集合 $G_m^a \supset F_m^a$ ヲ充分小サクトッテ, $\{G_m^a\}$ ナル Überdeckung ニ関シテ Kuratowski ノ Abbildung κ_m ヲ作レバ, $\kappa_m(F') \subset \overline{K_m'}$ デアッテ, κ_m ハ F' ノ Überdeckung $\{F_m^a \cdot F'\}$ ニ関シテ, 廣義ノ Kuratowski ノ Abbildung デアル。

K_m^{n+1} ノ Realisation. r ヲ $r(K_m') \subset F'$ ナル如ク定メル。然ルトキハ fr ハ K_m' ノ Eckpunkt ヲ S^n ニ

abbilden スル。S^n ヲ $n+1$ 次元 Euklid 空間 R^{n+1} ノ Einheitssphäre ト考ヘレバ，fr ハ，Euklidisch ナ Komplex $\overline{K'_m}$ ノ R^{n+1} ヘノ affin Abbildung ヲ定メル。

コノ affin Abbildung ヲ再ビ fr デ表ハスコトニスレバ，fr ニヨル K'_m ノ Eckpunkt ノ Bild ハ S^n ノ上ニアルノデアルカラ，m ヲ充分大キクトレバ，$fr(\overline{K'_m})$ ハ S^n ノ中心 O ヲ含マナイ：$fr(\overline{K'_m}) \subset R^{n+1} - O$。ソコデ，$O$ カラ S^n ヘノ Projektion ヲ P デ現ハシ，Pfr ナル stetige Abbildung ヲ考ヘル。

Lemma 1　$\varepsilon > 0$ ニ對シテ，m ヲ充分大キクトレバ

$$\rho(Pfr\, k_m(p), f(p)) < \varepsilon, \quad p \in F'$$

従ッテ又，$Pfr k_m$ ト f ハ homotop デアル。

証明ハ明白デアル。

Lemma 2.　m ヲ充分大キクトレバ，$\overline{K'_m}$ デ定義サレタ stetige Abbildung Pfr，$Pfr(\overline{K'_m}) \subset S^n$ ハ，$\overline{K}^{n+1}_m$ ノ S^n ヘノ Abbildung ニ擴張サレル。但シ f ニツイテ (B) ガ成立シテヰルト假定スル。

証明。　Komplex ニツイテハ Erweiterungssatz ガ既ニ証明サレテヰルカラ，今 Lemma 2 ガ成立シナイト假定スレバ，無限ニ多クノ m ニ對シテ (B) ガ成立シナイ：スナハチ

$$z^n_m \in K'_m, \quad z^n_m \sim 0 \ \text{in}\ K^{n+1}_m.$$

$$Pfr(z^n_m) \not\sim 0 \ \text{in}\ S^n.$$

ナル Koeffizientenbereich $\mathfrak{K}$ ノ Zyklus $\mathfrak{z}^n_m$ ガ存在スル。K^{n+1}_m デ $\infty 0$ ナル K'_m ノ Zyklus ハ群ヲナスカラ，$\mathfrak{z}^n_m$ ヲ適當ニ選ンデ

$$Pfr(\mathfrak{z}^n_m) \infty \lambda_m S^n \text{ in } S^n, \quad \frac{1}{4} \leqq \lambda_m \leqq \frac{3}{4}$$

ナル様ニスルコトガ出來ル。但シ $\lambda_m S^n$ ニ於ケル S^n ハ S^n ノ Grundzyklus，スナハチ $S^n = \dot{\bar{X}}^{n+1}$ ニ於ケル $\dot{X}^{n+1}$ ヲ現ハスモノト考ヘル。

カクノ如キ $\mathfrak{z}^n_m$ カラ適當ナ部分列 $\mathfrak{z}^n_{m_j}$ ($j = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots\cdots$) ヲトツテ，スベテノ m ニ對シテ $\pi_m(\mathfrak{z}^n_{m_j})$ ($j = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots$) ガ收斂スル様ニスルコトガ出來ル。部分列 $\mathfrak{z}^n_{m_j}$ ヲ一ツ定メテ

$$\hat{\mathfrak{z}}^n_m = \lim_{j \to \infty} \pi_m(\mathfrak{z}^n_{m_j})$$

然ルトキハ

$$\hat{\mathfrak{z}}^n_m \in K'_m, \quad \hat{\mathfrak{z}}^n_m \infty 0 \text{ in } K^{n+1}_m, \quad \pi^{m+1}_m(\hat{\mathfrak{z}}^n_{m+1}) = \hat{\mathfrak{z}}^n_m.$$

故ニ

$$Z^n = (\hat{\mathfrak{z}}^n_m)$$

ハ F' ノ Projektionszyklus デアツテ，

$$Z^n \infty 0 \quad \text{in } F$$

故ニ，(B) ナル假定ニヨツテ

$$f(Z^n) \infty 0 \quad \text{in } S^n$$

然ルニ，f ト $Pfr\,\kappa_m$ ハ homotop デアルカラ

$$Pfr\,\kappa_m(Z^n) \infty 0 \quad \text{in } S^n$$

定理 1 ニヨツテ，$\kappa_m(Z^n) \infty \hat{\mathfrak{z}}^n_m$ デアルカラ

$$Pfr(\hat{\xi}^n_m) \sim 0 \quad \text{in } S^n$$

然ルニ又。$\varepsilon>0$ ニ對シテ m ヲ充分大キクトッテオケバ，$m_j \geqq m$ ノトキ

$$r(\xi^n_{m_j}) \underset{\varepsilon}{\sim} r\pi^{m_j}_m(\xi^n_{m_j}) \quad \text{in } F'$$

トナルカラ，ε ヲ充分小サクトッテオケバ

$$fr(\xi^n_{m_j}) \sim fr\pi^{m_j}_m(\xi^n_{m_j}) \quad \text{in } R^{n+1}-0$$

故ニ

$$pfr(\xi^n_{m_j}) \sim pfr\pi^{m_j}_m(\xi^n_{m_j}) \quad \text{in } S^n$$

或ハ

$$pfr\pi^{m_j}_m(\xi^n_{m_j}) \sim \lambda_{m_j} S^n \quad \text{in } S^n$$

コヽニ於テ $j \to \infty$ ノ limit ヲトレバ，

$$pfr(\hat{\xi}^n_m) \sim \lim_{j\to\infty} \lambda_{m_j} S^n \quad \text{in } S^n$$

$pfr(\hat{\xi}^n_m) \sim 0$ in S^n デアルカラ，$\lim_{j\to\infty} \lambda_{m_j} \equiv 0 \pmod 1$ デナケレバナラナイ．コレハ $\frac{1}{4} \leqq \lambda_{m_j} \leqq \frac{3}{4}$ ニ反スル。コレデ Lemma 2 が証明サレタ。

Lemma 3. F ヲ Kompaktum，F' ヲソノ Teilkompaktum，g ヲ F ヲ S^n ヘ abbilden スル連續ナ Abbildung トスル。

F' ノ S^n ヘノ stetige Abbildung f, $f(F') \subset S^n$, が

$$\rho(g(p), f(p)) < 1 \ (= S^n \text{ ノ半徑}), \quad p \in F'$$

ナル條件ヲ滿足スルトキハ，f ハ F ノ S^n ヘノ stetige

Abbildung ニ擴張サレル。

証明: S^n ヲ Rand トスル $R^{n+1} \supset S^n$ ノ Einheitskugel ヲ E^{n+1} トスレバ, f ハ $f'(F) \subset E^{n+1}$ ナル stetige Abbildung f^{I} ニ擴張サレル。$p \in F'$ ナルトキ $\rho(g(p), f'(p)) < 1$ デアルカラ, $\eta > 0$ ヲ充分小サクトレバ,

$$\rho(p, F') \leqq \eta \quad ナラバ \quad \rho(g(p), f^{\mathrm{I}}(p)) < 1$$

トナル。カクノ如キ η ヲ一ツ定メテ,

$$\varrho(p) = \begin{cases} \rho(p, F') & \rho(p, F') \leqq \eta \text{ ノトキ}, \\ \eta & \rho(p, F') > \eta \text{ ノトキ}. \end{cases}$$

デ $\varrho(p)$ ナル連続函数ヲ定義スル。線分 $\overline{g(p)\, f'(p)}$ ヲ $\eta - \varrho(p) : \varrho(p)$ ノ比ニ内分スル点ヲ $f^{\mathrm{II}}(p)$ トスレバ $f^{\mathrm{II}}(p)$ ハ明ラカニ p ニツイテ連続デアッテ, $g(p) \in S^n$ ナルコトニ注意スレバ, $f^{\mathrm{II}}(F) \subset E^{n+1} - 0$ ナルコトガ分ル。ソコデ

$$\hat{f}(p) = P f^{\mathrm{II}}(p) \qquad p \in F$$

デ連続ナ Abbildung $\hat{f}(F) \subset S^n$ ヲ定義スル。然ルトキハ, f^{II} ノ定義カラ直チニ分ル如ク, $\hat{f}$ ハ f ノ Erweiterung デアル。

定理2ノ証明. Lemma 2 ニヨッテ存在ヲ証明サレタ Pfr ノ $\overline{K_m^{n+1}}$ ヘノ Erweiterung ヲ, $\widehat{Pfr}$ トスレバ, Lemma 1 ニヨッテ

$$\rho(\widehat{Pfr}\, k_m(p),\ f(p)) < 1 \qquad p \in F'$$

トナル。故ニ Lemma 3 ニヨッテ f ハ F ヲ S^n ヘ abbilden

スル *stetige Abbildung* ニ擴張サレル。（証明終リ）