706
~~676~~. 確率論ヘノ積分方程式ノ應用
(M. Fréchet ノ論文紹介)

吉田 耕作(阪大)

空間 R ノ点 x ガ單位時間ノ後ニ y 点ニ移ル遷移確率密度ガ $K(x,y)$ デ與ヘラレ, 一般ニ n 單位時間後ニ x 点ガ y 点ニ移ル遷移確率密度ガ

$$K^{(n)}(x,y)=\int_R K(x,z)K^{(n-1)}(z,y)\,dz$$
$$=\int_R K^{(n-1)}(x,z)K(z,y)\,dz$$

$(K^{(1)}(x,y)\equiv K(x,y)$ トスル$)$

デ與ヘラレル如キ discrete ナ homogeneous stochastic process ニ於テ, $n\to\infty$ ナルトキノ $K^{(n)}(x,y)$ ノ狀態ヲ積分方程式論ノ方法デ調ベテミヨウト云フノデアル。

確率論ニ關スル Fréchet ノ論文ハ澤山アルケレドモ, 上ノ問題ニツイテハ次ノ二ツガ重要ト思ハレル。Quaterly J. of Math. 5 (1934), p. 106—144. Bull. Soc. Math. France 62 (1934), p. 68—83.

定義カラ明ラカニ, 全テノ n ニ對シテ

(1) $K^{(n)}(x,y)\geqq 0,$

(2) $\int_R K^{(n)}(x,y)\,dy\equiv 1.$

Fréchet ハ次ノ假定ノモトニ議論シテヰル。即チ

i) R ノ total measure $\mathrm{mes}(R)$ = 有限[1].

ii) $M = \underset{x,y \in R}{u.\,b.} |K(x,y)|$ = 有限.

ノニッデアル。之等ノ假定ヲ緩クスルコトハ望マシイケレド モ証明ノ方法上必要ラシイ。

§1. 準備

Fréchet ノ議論ノ根據ハ次ノ三ツノ Lemmas = 要約サレル。

先ヅ $\left|K^{(n)}(x,y)\right| \leqq \int_R K(x,z) \left|K^{(n-1)}(z,y)\right| dz$

$\leqq \int_R K(x,z)\, u.\,b. \left|K^{(n-1)}(x,y)\right| dz = u.\,b. \left|K^{(n-1)}(x,y)\right|$

ダカラ induction = ヨッテ、全テノ n = 対シテ

(3) $\quad u.\,b. \left|K^{(n)}(x,y)\right| \leqq M.$

核 $K(x,y)$ ノ resolvent $\bar{R}(x,y,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K^{(n)}(x,y)$ ハ λ ノ有理型函數ニナルコトハ良ク知ラレテ居ル。實際[2]

$$(4)\quad \begin{cases} \bar{R}(x,y,\lambda) = \dfrac{A_0(x,y) + A_1(x,y)\lambda + \cdots + A_n(x,y)\lambda^n + \cdots}{1 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n + \cdots} \\ A_p(x,y) - \dfrac{1}{\underline{|p}} \displaystyle\int K\begin{pmatrix} x, & s_1 & s_2 \cdots\cdots s_p \\ y & s_1 & s_2 \cdots\cdots s_p \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \cdots\cdots ds_p \\ a_p = \dfrac{1}{\underline{|p}} \displaystyle\int K\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \cdots\cdots s_p \\ s_1 & s_2 \cdots\cdots s_p \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \cdots\cdots ds_p \end{cases}$$

---

(1) 1 トシテモ一般性失ハヌカラ以下 1 トスル.

(2) E. Goursat: Cours d'analyse III, p.371.

コヽニ

$$K\begin{pmatrix} x & s_1 \cdots\cdots & s_p \\ y & s_1 \cdots\cdots & s_p \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} K(x,y), & K(x,s_1), & \cdots\cdots, & K(x,s_p) \\ K(s_1,y), & K(s_1,s_1), & \cdots\cdots, & K(s_1,s_p) \\ \vdots & & & \\ K(s_p,y), & \cdots\cdots & & K(s_p,s_p) \end{Vmatrix}$$

デ與ヘラレ且ツ $\sum \lambda^p A_p(x,y)$, $\sum \lambda^p a_p$ 共ニ λ ノ整函數デアル。[1]

Lemma I. $\tilde{R}(x,y,\lambda)$ ノ pole λ ハ全テ共ノ絶対値 1 ヨリ小ナラズ, 且ツ絶対値 1 ノ pole ハ全テ simple pole デアル。

證明: $\left|\tilde{R}(x,y,\lambda)\right| \leqq \dfrac{M}{1-|\lambda|}$ for $|\lambda|<1$ by (3) ヨリ明カ。

Lemma 2. $\tilde{R}(x,y,\lambda)$ ノ絶対値 1 ノ pole λ ハ $\lambda^N=1$ (N 正整數) ヲ滿足スル。

證明. 第一段. λ ガ resolvent ノ pole ト云フコトカラ同次積分方程式

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\mathcal{R}} K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

ハ恒等的ニハ零デナイ積分可能ナ解 $\varphi(x)$ ヲ有スル。所ガ (3)

---

(1) $K(x,y)$ ガ (1), (2) ノ條件ヲ滿足スルト否トニ関ラズ。$\mathrm{mes}(\mathcal{R})$ ー有限, $\mathrm{u.b.}|K(x,y)|$ ー有限トノ二ツノ假定ダカラ云ヘルコトデアル。

ト $|\lambda|=1$ ニヨリ

$$\left|\varphi(x)\right| \leqq \int_R K(x,y)\left|\varphi(y)\right| dy \leqq M\int_R \left|\varphi(y)\right| dy$$

従ツテ $u.b.\left|\varphi(x)\right| = Q$ = 有限トナル。$\left|\varphi(x)\right|$ ハ実際ニ上限 Q ヲ attain スルコトガ示セル。モット precise ニ $\left|\varphi(x)\right| = Q$ トナル如キ点集合ヲ $\mathfrak{V}_\omega = E(x, |\varphi(x)| = Q)$ トシタトキニ $mes(\mathfrak{V}_\omega) \geqq \frac{1}{M}$ ガ云ヘル。ソレニハ任意ノ $0 < \varepsilon < Q$ ナル ε ヲ與ヘタトキ $\mathfrak{V}_\varepsilon = E(x, |\varphi(x)| \geqq Q-\varepsilon)$ ノ測度 $mes(\mathfrak{V}_\varepsilon) \geqq \frac{1}{Q}$ ガ云ヘルトヨイ。$\mathfrak{V}_\omega = \prod_\varepsilon \mathfrak{V}_\varepsilon$ ダカラ。

偖テ (1), (2), (3) ニヨリ

$$\left|\varphi(x)\right| \leqq \int_{\mathfrak{V}_\varepsilon} QK(x,y)\,dy + \int_{R-\mathfrak{V}_\varepsilon} (Q-\varepsilon)K(x,y)\,dy$$

$$= Q - \varepsilon\int_{R-\mathfrak{V}_\varepsilon} K(x,y)\,dy$$

ヲ得ル。所ガ Q ガ上限ダカラ任意ノ $\eta > 0$ ニ對シテ $Q - |\varphi(x')| < \varepsilon\eta$ ナル如キ x' ガ存在スル。従ツテ $\int_{R-\mathfrak{V}_\varepsilon} K(x',y)\,dy < \eta$. 之レト (2) ト $M = u.b.|K(x,y)|$ トヲ組合セテ $1-\eta \leqq \int_{\mathfrak{V}_\varepsilon} M\,dy$。$\eta$ 任意ダツタカラ $mes(\mathfrak{V}_\varepsilon) \geqq \frac{1}{M}$.

第二段. x_0 ヲ $\mathfrak{V}_\omega$ ノ任意ノ点トスレバ、之 x_0 ニ對シテ R ノ部分集合 $R_0(x_0)$ ガ定ツテ

$$\begin{cases} \varphi(x) \equiv \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda} & \text{for} \quad x \in R_0(x_0) \\ \mathrm{mes}(R_0(x_0)) \geqq \dfrac{1}{M}. \end{cases}$$

$\varphi(x_0) = \lambda \int_R K(x_0, y)\varphi(y)\,dy$ 及ビ $\int_R K(x_0, y)\,dy = 1$ カラ

$$\int_R K(x_0, y)\left\{1 - \frac{\lambda\varphi(y)}{\varphi(x_0)}\right\} dy = 0$$

ヲ得ル。$\lambda\varphi(y)/\varphi(x_0) = \alpha(y) + i\beta(y)$ ト置クト $|\varphi(x_0)| = Q$ カラ $\alpha^2(y) + \beta^2(y) \leqq 1$、故ニ $K(x_0, y) \geqq 0$, $1 - \alpha(y) \geqq 0$ カラ $K(x_0, y) > 0$ ナル如キ y ノ殆ンド到ル所デ $1 - \alpha(y) = 0$, 従ッテ $\beta(y) = 0$. 故ニ $\varphi(x) = \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda}$ ナル如キ x ノ点集合 $R_0(x_0)$ ハ確ニ $K(x_0, y) > 0$ ナル如キ y ノ集合ヲ含ム。(1)

$$1 = \int_R K(x_0, y)\,dy = \int_{K(x_0, y) > 0} K(x_0, y)\,dy \leqq M \int_{K(x_0, y) > 0} dy$$

ダカラ

$$\mathrm{mes}(R_0(x_0)) \geqq \frac{1}{M}.$$

第三段. x_1 ヲ $R_0(x_0)$ ノ任意ノ点トスルト $|\lambda| = 1$ ニヨリ勿論 $|\varphi(x_1)| = Q$. 従ッテ上ト同ジク $R_1(x_1)$ 定リ

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{\varphi(x_1)}{\lambda} = \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda^2} & \text{for} \quad x \in R_1(x_1) \\ \mathrm{mes}(R_1(x_1)) \geqq \dfrac{1}{M}. \end{cases}$$

(1) mes 0 ノ集合ヲ無視スレバ

以下同様ニシテ $R_2(x_2)$, $R_3(x_3)$, -------- ガ定リ

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda^{k+1}} \quad \text{for} \quad x \in R_k(x_k) \\ \mathrm{mes}\,(R_k(x_k)) \geqq \dfrac{1}{M}. \end{cases}$$

所ガ $\mathrm{mes}\,(R) = 1$ ダカラ、$R_l(x_l)$ ト $R_m(x_m)$ トガ $(l \neq m)$ 共通点ヲモツ如キ l, m ガ存在シナケレバナラナイ。之共通点デハ $\varphi(x_0)/\lambda^{l+1} = \varphi(x_0)/\lambda^{m+1}$ トナルカラ $\varphi(x_0) \neq 0$ ニヨリ $\lambda^{|l-m|} = 1$。 —— 以上 ——

λ ニツイテノ有理型函数 $K(x, y, \lambda)$ ノ絶対値 1 ノ pole ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_s$[1] 且ツ λ_i ニ於ケル principal part ヲ夫々

$$\frac{l_i(x, y)}{\lambda_i - \lambda}$$ (simple pole ナコトハ Lemma 1 ニ示シタ)

トスレバ, resolvent ニ関スル一般論カラ[2]

$$(5) \quad K(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \frac{l_i(x, y)}{\lambda_i} + \varepsilon(x, y)$$

ト置クトキ

---

(1) 但シ $\lambda_1 = 1$ トスル。 $\lambda = 1$ ガ pole ニナルコトハ $\varphi(x) = 1$ ガ $\varphi(x) = \int_R K(x, y)\,\varphi(y)\,dy$ ノ解ニナルコト ((2) 式) カラワカル。

(2) Goursat: loc. cit. p. 402

$$(6)\quad \begin{cases} \int_R l_i(x,z)\, l_i(z,y)\, dz = l_i(x,y) \\ \int_R l_i(x,z)\, l_j(z,y)\, dz \equiv 0, \qquad i \neq j \\ \int_R l_i(x,z)\, \mathcal{E}(z,y)\, dz = \int_R \mathcal{E}(x,z)\, l_i(z,y)\, dz \end{cases}$$

ガ成立スル。且ツ $\mathcal{E}(x,y)$ ナル核ノ resolvent ノ poles ハ $K(x,y,\lambda)$ ノ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_s$ 以外ノ poles ト principal part ヲ含メテ一致スル。

Lemma 3. $\underset{x,y\in R}{u.b.} |\mathcal{E}^{(n)}(x,y)| \leq \dfrac{C}{(1+\delta)^{n-1}}$; $n=1,2,\cdots\cdots$

ナル如ト常數 $C, \delta > 0$ ガ存在スル。

證明. $K(x,y)$ ト共ニ $|l_i(x,y)|$ ハ R デ有界ダカラ $u.b. |\mathcal{E}(x,y)| = \mathcal{E} =$ 有限デアル。ヨッテ $\mathcal{E}(x,y)$ ノ resolvent ニ (4) 式ヲ應用デキル。コノ resolvent ノ pole 全テ絶対値 1 ヨリ大ダカラ分母ノ絶対値ハ＞常數 > 0 for $|\lambda| \leq 1+2\delta$ ナル如キ $\delta > 0$ 存在ス。分子ノ一般項 $\lambda^p A_p(x,y)$ ノ絶対値ハ此ノ場合, Hadamard ノ行列式ニ関スル定理ヲ用ヒ, 全テノ $x, y \in R$ ニ對シ

$$\frac{\mathcal{E}^{p+1} (p+1)^{\frac{p+1}{2}} |\lambda|^p}{\lfloor p}$$

ヨリ小サイ。$\dfrac{1}{\lfloor p} < \dfrac{e^{p+1}}{(p+1)^{p+1}}$ ヲ用ヒテ之ノ p 乗根ハ

$p \to \infty$ ノトキ 0 ニ收斂スルコトガワカル。故ニ結局

$$\underset{\substack{|\lambda| \leqq 1+2\delta \\ x, y \in R}}{u.\,b.} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n-1} \varepsilon^{(n)}(x, y) \right| < C$$

ナル如キ常數 C ガ存在スルコトガワカル。ヨッテ Taylor 級數ノ良ク知ラレタ定理カラ求ムル結果ヲ得ル。

§2. 結 論

I. (5), (6) 及ビ Lemma 3 ニヨリ

$$(7)\begin{cases} K^{(n)}(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{l_i(x, y)}{\lambda_i^{n}} + \varepsilon^{(n)}(x, y) \\[2ex] |\varepsilon^{(n)}(x, y)| \text{ ノ上限} \leqq \dfrac{C}{(1+\delta)^{n-1}} \end{cases}$$

之レハ Lemma 2 ニヨリ $K^{(n)}(x, y)$ ガ n ニツイテ asymptotic ニ periodic ナコトヲ示ス。

II. $K^{(n)}(x, y)$ ガ $n \to \infty$ ノトキ, x, y ニツキ一樣ニ收斂スルタメノ必充條件ハ $R(x, y, \lambda)$ ノ絶對値 1 ノ pole ガ $\lambda = 1$ 以外ニ存在シナイコトデアル。

證明. 充分ナコトハ (7) 式ヨリ明カ. 必要. 若シ $\lambda_2 \neq 1$ ($|\lambda_2| = 1$) ナル pole アレバ

$$\varphi(x) - \lambda_2 \int_R K(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

ヲ滿足スル積分可能ナ $\varphi(x) \neq 0$ ガ存在スル。
Lemma 2 ト同樣ニシテ $|\varphi(x)|$ ハ有界且ツ任意ノ n ニ対シテ

$$\varphi(x)=\lambda_2^{\,n}\int_R K^{(n)}(x,y)\,\varphi(y)\,dy.$$

ガ成立スルカラ $\lambda_2 \neq 1$, $|\lambda_2|=1$ デ $K^{(n)}(x,y)$ ハ一様収斂デハアリ得ナイ。

III. $K^{(m)}(x,y)$ ノ Césaro ノ平均値

$$\frac{K^{(\nu+1)}(x,y)+K^{(\nu+2)}(x,y)+\cdots\cdots+K^{(\nu+n)}(x,y)}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{s} l_i(x,y)\left[\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{\nu+2+t}\right]+\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon^{(\nu+t)}(x,y)$$

$$\longrightarrow l_1(x,y) \quad (x,y,\nu\text{ ニツイテ一様ニ})$$

as $n\to\infty$.

IV. 上ノ極限遷移確率密度[1] $l_1(x,y)$ ガ x ニ depend シナイタメノ必充條件ハ，同次積分方程式

$$(8)\qquad \varphi(x)=\int_R K(x,y)\,\varphi(y)\,dy.$$

ノ一次独立ナ解ガ $\varphi\equiv 1$ 以外ニナイコトデアル。

証明．必要．(8) カラ $\varphi(x)=\int K^{(n)}(x,y)\varphi(y)\,dy$ ヲ得ルカラ $\varphi(x)=\int l_1(x,y)\,\varphi(y)\,dy$，従ッテ $\varphi(x)$ ハ $l_1(x,y)$ ト共ニ x ニ independent.

充分．$\lambda=1$ ガ $k(x,y,\lambda)$ ノ simple pole ト云フコトカラ、積分方程式ノ一般論[2] ニヨリ

(1) Césaro ノ平均

(2) Goursat: loc. cit. p. 405

$$l_s(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x)\psi_i(y).$$

コヽニ $\varphi_i,\ \psi_i$ ハ夫々

$$\varphi_i(x)=\int K(x,y)\varphi_i(y)\,dy,\quad \psi_i(x)=\int K(z,x)\psi_i(z)\,dz$$

ノ一次独立ナ solution ヲ悉シテヰル。故ニ明カ。

V. $l_1(x,y)$ ガ y ニ depend シナイタメノ必充條件ハ

$$\int K(z,x)\,dz=1$$

且ツ $\psi(x)=\int K(z,x)\psi(z)\,dz$ ノ一次独立ナ解ガ $\psi\equiv 1$ 以外ニナイコトデアル。

證明. III ノ所論カラタヤスクワカル。シカモ III ト組合セテコノトキハ $l_1(x,y)\equiv$ const. ニナル。