714. 或定積分ニ就イテ

松村　宗治（台北大）

zハ複素數，tハ實變數ニシテ $g(t)$ハ正ノ實函數ニシテ $0 \leqq t \leqq \infty$ ナル範囲内デ定義サルルモノニシテ有限確定値ヲ有シ且ツ同ジ範囲内ニ於テハ積分可能ナルモノトス，而シテ

$$f(z)=\int_0^{\infty} g(t)\, e^{-zt}\, dt$$

ナル函數 $f(z)$ ヲ考ヘ $f(z)$ ガ z 平面内ノ y 軸ノ右方ノ半平面内ニ於テ

$$|f(x)| \leqq 1$$

ナルタメノ十分條件ハ

$$\mathrm{T}(t,x) \equiv \frac{\int_0^t \left[\int_0^t g(t) e^{-xt} dt\right] dt}{\int_0^t dt}$$

ナル $\mathrm{T}(t,0)$ ヲ考フルトキニ $|\mathrm{T}| \leqq 1$ ナルコトガ $t \geqq 0$ ナルスベテノ t ニ向ッテ成立スルコトデアル。上ノ證明ハ次ノ樣デアル。

先ヅ $\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-rt} dt \cdot \int_0^\infty e^{-rt} dt \int_0^\infty g(t) e^{-rt} dt$ ヲ考ヘコレヲ東北數學雜誌（1920年6月号）ニ於ケル小島鉄藏博士ノ論文：*Theorems on convergent Integrals.* ニ於ケル

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \cdot \int_0^\infty g(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^t g(t-s) f(s)\,ds\right) dt$$

ナル定理ニ當テ嵌メテ計算セントス。但シ γ ハ $\mathcal{Z}$ ノ絶對値ヲ示ス。

然ルトキハ

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^\infty e^{-rt} dt \left\{\int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-r(t-s)} g(s) e^{-rs} ds\right) dt\right\} \\
&= \int_0^\infty e^{-rt} dt \left\{\int_0^\infty \left(\int_0^t g(s) e^{-rt} ds\right) dt\right\} \\
&= \int_0^\infty e^{-rt} dt \left\{\int_0^\infty e^{-rt} \left(\int_0^t g(s)\,ds\right) dt\right\} \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^t \left\{e^{-r(t-s)} e^{-rs} \int_0^s g(t)\,dt\right\} ds\right] dt
\end{aligned}$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^t\left\{e^{-rt}\int_0^s g(t)\,dt\right\}ds\right]dt$$

$$=\int_0^\infty\left[e^{-rt}\int_0^t\left(\int_0^s g(t)\,dt\right)ds\right]dt$$

$$=\int_0^\infty\left[e^{-rt}\int_0^t\left(\int_0^t g(t)\,dt\right)dt\right]dt$$

$$=\int_0^\infty\left[e^{-rt}\,t\,\mathrm{T}(t,0)\right]dt$$

トナリ，マタ一方ニ於テ

$$\int_0^\infty e^{-rt}dt\int_0^\infty e^{-rt}dt=\int_0^\infty\left(\int_0^t e^{-r(t-s)}e^{-rs}ds\right)dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^t e^{-rt}ds\right)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-rt}\left(\int_0^t ds\right)dt$$

$$=\int_0^\infty t\cdot e^{-rt}dt$$

即チIノ値ヲ両面ヨリ計算シテコレヲ等シテオケバ

$$f(x)\cdot\int_0^\infty t\cdot e^{-rt}dt=\int_0^\infty e^{-rt}\cdot t\cdot \mathrm{T}(t,0)\,dt$$

トナル。

最後ノ式ニ於テ双方ノ絶對値ヲトレバTニ関スル假定ニヨリ

$$|f(x)|\leqq 1$$

ヲ得ベシ。

上記ノ條件ガマタ同時ニ必要條件デアルコトヲ証明スルニハ如何ニスベキカ。

尚又 $f(z)=\int_0^\infty g(t)\,z^t\,dt$ ナル積分ニ於テ z ハ複素数，t ハ實数トシ $g(t)$ ハ $0\leqq t\leqq\infty$ ニ於テ積分可能トシ且 $f(z)$ ハ $|z|<1$, $t\geqq 0$ ニ於テ收斂シ且 $|z|<1$ ニ於テ $|f(z)|\leqq 1$ トナルタメノ十分條件ハ

$$T(t,z)=\frac{\int_0^t\left[\int_0^t g(t)\,z^t\,dt\right]dt}{\int_0^t dt} \quad \text{但シ}\ t\geqq 0$$

ト置クトキニ $t\geqq 0$ ナルスベテノ t 及ビ $|z|=1$ ナル円周ニ於テ $|T(t,z)|\leqq 1$ ナルコトナリ。

此ノ証明ハ上記ノ様ニシテナスコトガ出來ルガ其ノ必要條件ノ証明ハ如何ニスベキカ。

以上ハ Landau ノ函数論ノ書物ニアル一ツノ定理ヲ積分ニ直シテ考ヘタモノデアツテ自分ガズット以前ニ考ヘタコトノアルモノデアル。