716. 確率論ヘノ積分方程式ノ應用 IV.

(Smoluchowsky ノ方程式並ニ Markov ノ聯鎖)

吉田　耕作（阪大）

前談話（679）ノ定理ヲ使ツテ Smoluchowsky ノ方程式

(14)　$T(t+s) = T(t)\,T(s) \qquad (0 < t,\ s < \infty)$

ヲ取扱ツテミル。始メ筆者ハ Fourier 解析ニヨリ，角谷氏ハ系列 $\left\{T\left(\frac{t}{2^n}\right)\right\}$ ヲ考ヘルコトニヨリ略ヽ同ジ結果ヲ得タガ，何レモ微分ノ計算ヲ要スル。其ノ後考ヘ直シテミタラ，次ノ様ニスルノガ手取リ早ク且ツ übersichtlich ノ様デアル。色々御助力ヲ受ケタ角谷氏ニコヽデ感謝シテヲキマス。

次ニハ定理ヲ用ヒテ Markov ノ聯鎖ニ關スル古典的ナ結果ガ擴張シタ形デ得ラレルコトヲ示シタイ。

§8. Smoluchowsky ノ方程式

complex Banach 空間 $\mathfrak{L}$ ノ線型 operator

ノ系$T(t)$ガ(14)ヲ満足スルトスル。コノ解$T(t)$ニ次ノ二條件ヲ附ケル。

(a) 或ル$t_0>0$ニ對シ$T=T(t_0)$ガ定理ノ條件(i), (ii)ヲ満ス。

(b) $T(t)$ハtニ關シテ連續:

$$\lim_{t\to t_1}\|T(t)-T(t_1)\|=0.$$

然ラバ，定理ニ於ケルTノ分解ト類似ノ$T(t)$ノ分解ガ得ラレルコト次ノ如クデアル。

先ヅ定理ニヨリ

$$(*)\begin{cases} T=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i T_i+S, \quad |\lambda_i|=1, \quad \lambda_i\neq\lambda_j\ (i\neq j), \\ T_i^2=T_i,\ T_iT_j=0\ (i\neq j), \\ T_iS=ST_i=0\ \text{且ツ}\ \|S^n\|\leq\dfrac{\beta}{(1+\varepsilon)^n} \\ \qquad\qquad (n=1,2,\text{------};\ \varepsilon,\beta>0). \end{cases}$$

今$T_i(t)=T_iT(t)T_i$トシ，次ノ如ク置ク

$$(15)\quad T(t)=\sum_{i=1}^{k}T_i(t)+S(t).$$

$$(*)\text{カラ}\quad T_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{T}{\lambda_i}\right)+\left(\frac{T}{\lambda_i}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{T}{\lambda_i}\right)^n\right\}$$

ダカラ(14)ニヨリT_iハ全テノ$T(t)$ト commutative: $T_iT(t)=T(t)T_i$.

故ニ(14), (*)ニヨリ容易ニ

(16) $T_i(t+s) = T_i(t)\,T_i(s)$

(17) $T_i(t)\,T_j(s) = 0\ (i \neq j)$,

$T_i(t)\,S(s) = S(s)\,T_i(t) = 0$.

(18) $S(s)\,S(t) = S(t+s)$

ガ得ラレル。次ニ

<u>$S(t)$ ノ評價</u>. (b) カラ $S(t)$ ガ $0<t<\infty$ デ t ニ関シ連続ナコトハ明カ, $S=S(t_0)$ ガ (*) ヲ満スカラ, (18) ニヨリ

(19) $\|S(t)\| \leqq d \exp(-ct)$; $c, d > 0$,

$$t_0 \leqq t < \infty$$

<u>$T_i(t)$ ノ構造</u>. T_i ニヨル $\mathfrak{L}$ ノ像ヲ $\mathfrak{L}_i$ トスルト $T_i^2 = T_i$ ニヨリ $\mathfrak{L}_i$ ノ各点ハ何レモ T_i ニヨリ invariant. T_i ハ vollstetig (<u>定理</u>ニ証明シタ) ダカラ, $\mathfrak{L}_i$ ノ単位球 $\|x\| \leqq 1$ ハ compact. ヨッテ Riesz ノ定理[1] ニヨリ <u>$\mathfrak{L}_i$ ハ有限次元</u>.

$T_i(t) = T_i\,T(t)\,T_i$ ハ $\mathfrak{L}_i$ ヲ $\mathfrak{L}_i$ 内ニ寫ス. $T_i^2 = T_i$ ダカラ $T_i(t) = T_i(t)\,T_i$. ヨッテ $T_i(t) = M_i(t)\,T_i$ ($M_i(t)$ ハ $\mathfrak{L}_i$ ヲ $\mathfrak{L}_i$ 内ニ寫ス一次寫像即チ有限次元ノ matrix !!) ノ形デアル. $M_i(t)$ ハ勿論 (16), (b) ヲ満足スル ($T_i^2 = T_i$ ニヨル) カラ, $M_i(t_0)$ = 単位行列ニヨリ, $M_i(t)$ ハ $0 \leqq t < \infty$ デ t ニ関シ連続且ツ (16) ヲ満足シ, $M_i(0)$ = 単位行列.

---

(1) S. Banach: Théorie des Opérations Linéaires, p. 83.

ヨッテ,[1] $\| M_i(t)-M_i(0)\| < 1$ for $t_1 \leqq 1$ トスルト

$$\begin{cases} M_i(t) = \exp\dfrac{t}{t_1}C = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{t}{t_1}C\right)^n \\ C = \log M(t_1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(M(t_1)-M(0)\right)^n \end{cases}$$

C ノ固有値ヲ $\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots, \mu_e$ トスルト,之カラ

$$(20) \quad M_i(t) \approx \begin{Vmatrix} \exp(\mu_1 t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\mu_e t) \end{Vmatrix} \quad (\approx \text{ハ同値ノ意味})$$

然シテ $M_i(t_0)$ = 単位行列カラ $\mu_s t_0 \equiv 0 \pmod{2\pi i}$.

ヨッテ $T = T(1)$ ノ Eigenraum $\mathfrak{L}_i = T_i\mathfrak{L}$ ガ time t ノ変化ニヨッテ Eigenraum l コニ分レル状態ガワカッタ。

(15) 乃至 (20) 及ビ $T_i(t) = M_i(t)T_i$ ニヨッテ定理ニ相当スルコトガ $T(t)$ ニ関シテ云ヘタワケニナル。

§ 9. Markov ノ聯鎖 (Chain)

我々ノ談話ノ出発点ハ Fréchet ノ定理 (談話 676) デアッタ。之レハ古典的ナ Markov chain ノ議論ヲ函数空間ニ拡張シタモノデアル。Markov chain ノ定義ハ次ノ通リ。

---

(1) 拙著: 日本数學輯報 13 (1936) p. 24 以下ノ証明ガソノママアテハマル。

有限コノ状態〔1〕,〔2〕,……,〔s〕ガアリ，單位時間ノ後ニ状態〔i〕カ状態〔j〕ニ移ル遷移確率ガ t_{ij}，n 單位時間ノ後ニ状態〔i〕カ状態〔j〕ニ移ル遷移確率 $t_{ij}^{(n)}$ ガ行列

$$T^n \quad \left(T=(t_{ij}),\quad t_{ij}^{(1)}=t_{ij}\right)$$

ノ $i-j$ 要素デ與ヘラレル如キ事象ヲ Markov chain ト呼ブ。

明ラカニ $\sum_{j=1}^{s} t_{ij}^{(n)}=1,\ t_{ij}^{(n)}\geqq 0$ ダカラ，行列 T ハ我々ノ定理ノ條件 (i), (ii) ヲ満足スル。筆者ノ調ベタ所デハ Markov chain ニ関シテ優レタ叙述ハ v. Mises ノ書物 Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig (1931) p.533−549 ニアル。定理ヲ使ヘバ状態全体ガ complex Banach 空間 $\mathfrak{L}$ ヲ作ル場合ニ，T ノ positivity ($t_{ij}^{(n)}\geqq 0,\ \sum_{j=1}^{s} t_{ij}^{(n)}=1$ ニ相當スル) ノ假定ナシニ，v. Mises ニ出テヲル事柄ノ中 essential ナ部分ガ擴張シタ形デ得ラレルコト次ノ通リデアル。

$\mathfrak{L}$ ノ線型 operator T ガ定理ノ條件 (i), (ii) ヲ満足スルトスレバ定理ニヨリ (※) ガ成立ツ。E ヲ $\mathfrak{L}$ ノ單位 operator トスルト $T_0=E-\sum_{i=1}^{k} T_i$ ハ (※) ニヨリ $T_0^2=T_0,\ T_0T_i=T_iT_0=0\ (i\geqq 1)$ ヲ満ス。即チ E ハ

互ニ orthogonal ナ idempotent $T_0, T_1, \cdots\cdots, T_k$ ノ直和ニナル。ヨッテ T_i ニヨル $\mathfrak{L}$ ノ像ヲ $\mathfrak{L}_i$ トスルト $\mathfrak{L}$ ハ原点以外ニ互ニ共通点モタヌ $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{L}_k$ ノ直和ニナル。

Mises ニナラッテ $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{L}_i\ (i \geqq 1)$ ヲ夫々 keine Zugangs-Wahrscheinlichkeit ノ部分 keine Abgangs-Wahrscheinlichkeit ノ部分ト呼ブウ。其ノ理由ハ次ノ通リ:

$x \in \mathfrak{L}_0$ トスルト $T_0^2 = T_0$ ニヨリ $T_0 x = x$. ヨッテ (※) ニヨリ

$$T \cdot x = T \cdot \Big(E - \sum_{i=1}^{k} T_i\Big) x = S x.$$

同ジク $T^2 \cdot x = S^2 x, \cdots\cdots, T^n \cdot x = S^n x$ ヲ得ル。ヨッテ (※) ニヨリ time ト共ニ幾何級数的ノ速度デ一様ニ $T^n x$ が $\mathfrak{L}$ ノ原点 O ニ近ヅク。

$x \in \mathfrak{L}_i\ (i \geqq 1)$ トスルト $T_i^2 = T_i$ ニヨリ $T_i x = x$. ヨッテ (※) ニヨリ $T \cdot x = T \cdot T_i \cdot x = \lambda_i x$. 同ジク $T^2 x = \lambda_i^2 x, \cdots\cdots, T^n x = \lambda_i^n x$ ヲ得ル。ヨッテ全テノ時間ニ対シ $T^n x \in \mathfrak{L}_i$. 且ツ $|\lambda_i| = 1$ ニヨリ $T^n x$ ハ時間ニ對シ概週期的 (fast periodic) ニ $\mathfrak{L}_i$ 内ヲウロツク。(1)

以上ノ結果ハ Kryloff-Bogoliouboff ノ Fréchet

---

(1) §8 ノ所論ト同ジク T_i ノ vollstetig ナコトカラ $\mathfrak{L}_i$ ハ有限次元デアル。

定理ニ對スル確率論的解釋（談話678）ト對比シテ頗ワト意味ガハッキリスル。ソレ故現代式(?)ニ $\mathfrak{S}_i$ $(i \geq 1)$ $\mathfrak{S}_0$ ヲ夫々 <u>ergodic ナ部分</u>, <u>dissipative ナ部分</u> ト呼ンダ方ガヨサ相デアル。