717. Convex ナ集合ニ関スル不動点定理, II

角谷　静夫 (阪大)

最初ニ前回ノ誤リデ氣ノツイタモノヲ訂正シマス。最初ノ頁ノ定理ノ三行目「EヲEノ中ヘ」ハ「BヲBノ中ヘ」ノ誤リデアリマス。

§7

Almost periodic function トノ関係　先ヅ almost periodic function ノ定義カラ始メル。Gヲ任意ノ群, Eヲ G ノ上デ定義サレタ有界ナ実数値函数 $f(x)$ 全体カラ成ル linear space トスル。任意ノ $f \in E$ ニ對シテ $\|f\| = \operatorname{l.u.b.}_{x \in G} |f(x)|$ ニヨッテ norm $\|f\|$ ヲ定義シ, 任意ノ $f, g \in E$ ニ對シテ $d(f, g) = \|f - g\|$ ニヨッテ f ト g トノ距離 $d(f, g)$ ヲ導入スル。$f \in E$ ガ almost periodic デアルト云フノハ $f_a(x) = f(xa)$, $a \in G$, ナル形ノ函数全体ガ作ル集合 A

$(\subset E)$ ガ E ニ於テ compact ナ closure $\overline{A}$ ヲモツコトデアル。[12] 今 E ニ於ケル A ノ closed convex cover B ヲ考ヘレバ B ハ又 compact デ且ツ B ハ

$$(\divideontimes)\quad \lambda_1 f(xa_1)+\lambda_2 f(xa_2)+\cdots\cdots+\lambda_n f(xa_n),$$

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n \in G;\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n \geqq 0,$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n=1;\quad n=1,2,\cdots\cdots$$

ナル形ノ函數デ一様ニ近似出來ル函數全体ノ集合デアル。今任意ノ $g \in E$ ニ對シテ $T_a\{g(x)\}=g(xa)$ ニヨツテ $T_a\{g(x)\}$ ヲ定義スレバ T_a ハ E ヲ E 全体ニ linear ニ(勿論 affine!)寫像スル isometric ナ變換デ且ツ B ハ T_a ニヨツテ B 全体ニ寫像サレテキル。

V. Neumann 及ビ Maak ニ依レバ almost periodic function $f(x)$ ニ對シテハ常ニ一ツノ mean $\mathfrak{M}(f)$ ガ對應シ常數 $\mathfrak{M}(f)$ ハ $(\divideontimes)$ ノ形ノ函數デ一様ニ近似出來ルノデアル。コレハ上ノ如ク考ヘレバ常數 $\mathfrak{M}(f)$ ガ B ニ属シテキルト云フコトニ外ナラナイ。常數ハ E ノ中デアラユル $T_a\ (a \in G)$ ニ對シテ不動ナ点トシテ characterize 出來ルカラ almost periodic function ニ

---

(12) 定義ノ形ヨリ云ヘバカヽル函數ハ right almost periodic function ト名付ケルベキデアル。シカシ、同様ニシテ left almost periodic function ヲ定義シテモ結局同ジモノシカ得ラレナイノデアル。コレニ關シテハ例ヘバ Maak ノ論文(4)參照。

mean ガ存在スルト云フコトハ B ノ中ニスベテノ T_a ニ對シテ不動ナ点ガ存在スルト云フコトト同ジデアル。ヨツテ v. Neumann-Maak ノ結果ハ次ノ如ク述ベルコトガ出來ル：

$\boxed{\text{定理}}$ E ヲ norm ノアル linear space, B ヲ compact, convex ナ E ノ部分集合（空デナイモノ）, Γ ヲ E ヲ E ノ中ヘ affin ニ寫像シ且ツ同時ニ B ヲ B ノ中ヘ寫像スル isometric ナ affine Transformation $\varphi(x)$ ガ作ル群[13]トスレバ，スベテノ $\varphi \in \Gamma$ ニ對シテ $\varphi(x) = x$ トナル如キ B ノ点 x ガ存在スル。

コノ様ニ定理ヲ書キ改メレバ E ガ函數ガ作ル linear space デアルト云フコトハモハヤ必要デハナイ。ヨツテ證明ハ直接ヤリ直スベキデアル。證明ハ Maak ノ眞似ヲシテ次ノ如クヤレバヨイ。

證明： E ハ metric space, B ハソノ中ノ compact ナ集合デアルカラ又 totally bounded デアル。ヨツテ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ B ヲ有限個（$=N$ 個）ノ直徑ガ ε ヲ超ヘナイ互ニ共通点ノナイ集合ニ分ケルコトガ出來ル。$\varepsilon > 0$ ヲ定メタトキ，カヽルアラユル分割ニ對スル

---

(13) $\varphi(x)$ ガ isometric ナラバ affine ナルコトガワカッテヰルカラ（S. Banach: Opération linéaire, 166頁定理2）affine ト云フ假定ハイラナイ。

Nノ最小値ヲN_εトセヨ。

Bハ直径ガεヲ超ヘナイ互ニ共通点ノナイN_ε個ノ集合$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_{N_\varepsilon}$ニ分リルコトガ出来ル。今各々ノ$B_i$（$i=1, 2, \cdots\cdots, N_\varepsilon$）カラ任意ニ一点$x_i$ヲ取リ出セバ

$$x = \frac{1}{N_\varepsilon}\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} x_i$$

ハ明カニBノ点デ且ツ任意ノ$\varphi \in \Gamma$ニ対シテ$\|x-\varphi(x)\| \leqq 2\varepsilon$デアル。何トナレバ$\varphi$ハBヲB全体ニ一対一ニ isometric ニ寫像スルカラ

$$B = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \varphi(B_i)$$

ハ又一ツノBノ分割デ各々ノ$\varphi(B_i)$ハ直径ガεヲ超ヘナイ。N_εハカヽル分割ノ個数ノ最小値デアルカラr個ノ$\varphi(B_i)$ガ$r+1$個ノB_jヲ含ムコトハナク、又r個ノB_jガ$r+1$個ノ$\varphi(B_i)$ヲ含ムコトモナイ。ヨッテ Maak ノ Lemma[14] ニヨッテBノ二ツノ分割$B=\sum B_j$ト$B=\sum\varphi(B_i)$トニハ共通ノ代表元y_k（$k=1,2,\cdots\cdots,N_\varepsilon$）ヲ取ルコトガ出来ル。ヨッテ$\varphi(x)$ガ

---

(14) W. Maak: Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen, Abh. math. Semin. Hansisch. Univ, Bd 11 (1936). p. 241. 又ハ H. Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie, 1937. p. 11. Maak ノモトノ証明デハ group G ヲ分割シテキル。コヽデハBヲ分割シテキルコトニ注意!

affine ナルコトヨリ

$$\|x-\varphi(x)\|=\left\|\frac{1}{N_\varepsilon}\sum x_j-\frac{1}{N_\varepsilon}\sum\varphi(x_i)\right\|$$

$$\leqq\left\|\frac{1}{N_\varepsilon}\left(\sum x_j-\sum y_k\right)\right\|+\left\|\frac{1}{N_\varepsilon}\left(\sum\varphi(x_i)-\sum y_k\right)\right\|\leqq 2\varepsilon$$

カヽル x ハ各々ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ定マルカラコレヲ x_ε トオク。今 $\{x_{\frac{1}{n}}\}$ $(n=1,2,\ldots\ldots)$ ヲ考ヘレバコレハ何レモ B ノ点デアルカラ B ガ *compact* ナルコトヨリ少クトモ一ツ B ニ屬スル集積点ガ存在スル。コレヲ x トセヨ。コレガ求ムル不動点ナルコトヲ証明シヨウ。今 $\varepsilon>0$ ヲ任意ニトレバ x ガ $\{x_{\frac{1}{n}}\}$ $(n=1,2,\ldots\ldots)$ ノ集積点デアルカラ $\|x-x_{\frac{1}{n_0}}\|\leqq\varepsilon$, $\frac{1}{n}\leqq\varepsilon$ ナル如キ n_0 ガ必ズ少クトモ一ツ存在スル。コノ n_0 ニ對シテハ φ ガ *isometric* ナルコトヨリ

$$\|\varphi(x)-x\|\leqq\|\varphi(x)-\varphi(x_{\frac{1}{n_0}})\|+\|\varphi(x_{\frac{1}{n_0}})-x_{\frac{1}{n_0}}\|+\|x_{\frac{1}{n_0}}-x\|$$

$$=\|x-x_{\frac{1}{n_0}}\|+\|\varphi(x_{\frac{1}{n_0}})-x_{\frac{1}{n_0}}\|+\|x_{\frac{1}{n_0}}-x\|$$

$$\leqq\varepsilon+2\cdot\frac{1}{n_0}+\varepsilon\leqq4\varepsilon$$

トナル。$\varepsilon>0$ ハ任意デアッタカラ $\varphi(x)=x$ デナケレバナラナイ。コレデ定理ノ証明ガ終ルノデアルガ、コヽニ注意スベキハ、E ガ *metric* デアルト云フコトガ必ズシモ必要デナイノコトデアル。

即チ B が bicompact デアルト云フ假定ガアレバ E ガ第一可附番公理ヲ滿足シテヰル必要ハナイノデアル。（E ガ第一可附番公理ヲ滿足シテ居リ且ツ locally convex デアレバ metric able デアル。）勿論コノ場合ハ isometric ニ代ルコレト同樣ナ條件ガ必要デアル。

定義 E ヲ locally convex ナ linear topological space, φ ヲ E ヲ E ノ中ヘ寫像スル affine transformation トスル。今モシ任意ノ E ノ原點ノ近傍 U 及ビ E ノ任意ノ點 x ニ對シテ $\varphi(x)+U=\varphi(x+U)$ [15] ガ成立スレバ φ ハ congruent ナ寫像デアルト云フ。

定理 E ヲ locally convex ナ linear topological space, B ヲ bicompact, convex ナ E ノ部分集合（空デナイモノ）, Γ ヲ E ヲ E 全体ヘ one-to-one ニ寫像スル congruent ナ affine transformation $\varphi(x)$ [16] ノ作ル群トスレバ, スベテノ $\varphi\in\Gamma$ ニ對シテ $\varphi(x)=x$ トナル如キ B ノ點 x ガ存在スル。

證明ハ先ノ isometric ナ場合ト殆ド同樣ニヤルコトガ出來ル。

---

(15) $x+A$ ハ $x+a$, $a\in A$ ナル如キ形ノ點全体ノ集合ヲ表ハス。

(16) コノ場合モ congruent ト云フ假定カラ affin ト云フコトガ得ラレルコトガ證明出來ルカラ affin トイフ假定ハイラナイ。

タヾ E ガ metric デナイタメニ種々ノ困難ヲ生ジル。先ヅ E ハ metric デナイカラ B ヲ直徑ガ ε ヲ超ヘナイ集合ニ分割シヨウトシテモ直徑トイフモノガ考ヘラレナイ。

シカシ B ハ bicompact デアルカラ任意ノ原點ノ近傍 $\mathfrak{U}$[17] ニ對シテ E ヲ有限個ノ互ニ共通點ノナイ集合 B_i ($i=1,2,\cdots\cdots,N$) ニ分割シテ各々ノ B_i ガ適當ナ $x_i \in B_i$ ニ對シテ $B_i \subset x_i + \mathfrak{U}$ トナルヤウニスルコトガ出來ル。$\mathfrak{U}$ ヲ定メタトキ，カヽル N ノ最小値ヲ $N_{\mathfrak{U}}$ トシ、コレニ對シテ前ト同樣ニ $x_{\mathfrak{U}} = \dfrac{1}{N_{\mathfrak{U}}} \displaystyle\sum_{i=1}^{N_{\mathfrak{U}}} x_i$ ヲ作ル。明カニ $x_{\mathfrak{U}} \in B$ ニテ且ツ $\mathfrak{U}$ ガ convex ナルコトト $\varphi(x)$ 及ビ $\varphi^{-1}(x)$ ガ congruent ナルコトヨリ Maak ノ Lemma ヲ用フレバ任意ノ $\varphi \in \Gamma$ ニ對シテ $\varphi(x_{\mathfrak{U}}) - x_{\mathfrak{U}} \in 2\mathfrak{U}$ トナル。次ニカヽル $x_{\mathfrak{U}}$ ヲ各々ノ $\mathfrak{U}$ ニ対シテ作リ $\{x_{\mathfrak{U}}\}$ ノ集積點ヲ考ヘルノデアルガ一般ニハカヽル $\mathfrak{U}$ ハ可附番以上アルカラ(勿論 $\mathfrak{U} = -\mathfrak{U}$ ニテ且ツ convex ナモノヲ考ヘル。シカモソノウチ原點ノ近傍系ト同等ニナルダケヲ考ヘレバヨイノデアルガ、コレハ一般ニハ可附番個デハ間ニ合ハナイ) 前ノ樣ナ議論ハ成立シナイ。ヨツテコヽハ次ノ如ク改メル。先ヅ一

---

(17) コレハ E ガ locally convex デアルト云フ假定ヨリ convex ナモノダケヲ考ヘレバ十分デアル。又 $\mathfrak{U} = -\mathfrak{U}$ トナルモノダケヲ考ヘレバ十分。(但シ $-\mathfrak{U}$ ハ $-x$, $x \in \mathfrak{U}$ トナル如キ點 $-x$ 全体ノ集合)。ヨツテ今後ハカヽル $\mathfrak{U}$ ノミヲ考ヘルコトニスル。

ツノ U ヲトリ，アラユル $V\subset U$ ナル V ニ對スル $\{x_V\}$ ヲ考ヘル。コレハ B ニ含マレル無限集合デアルカラ B ガ *bicompact* ナルコトヨリ B ニ屬スル集積点ヲモツ。B ニ屬スル $\{x_V\}$ $(V\subset U)$ ノ集積点全体ノ集合ヲ H_U トスル。H_U ハ明カニ空集合デナク且ツ *bicompact* デアル。シカモ $V\subset U$ ナラバ $H_V\subset H_V$ デアル。

コレヨリ任意ノ U_1, U_2 ニ對シテ $H_{U_1}\cdot H_{U_2}\neq\Lambda$ デアル。何トナレバ $V\subset U_1\cdot U_2$ ナル V ガ存在スルカラコノ V ニ對シテ H_V ヲ考ヘレバ $H_V\neq\Lambda$ ニテ $H_V\subset H_{U_1}\cdot H_{V_2}$ デアル。

故ニ各々ノ H_U ガ *bicompact* ナルコトヨリ，スベテノ H_U ハ少クトモ一ツノ共通点 x ヲモツ。コノ共通点 x ガ求ムル不動点ナルコトヲ証明シヨウ。$\varphi(x)\neq x$ ナル如キ $\varphi\in\Gamma$ ガ存在スルト假定シテ矛盾ガオコルコトヲ証明シヨウ。$\varphi(x)-x\,\overline{\in}\,4U$ ナル如キ U ヲトル。コノ U ニ對シテ $x\in H_V$ ナルコトヨリ、H_V ノ定義ヲ考ヘレバ $x-x_V\in U$, $V\subset U$ ナル如キ x_V ガ存在スル。ヨツテ $\varphi(x)$ ガ congruent ナルコトヨリ $\varphi(x)-x=(\varphi(x)-\varphi(x_V))+(\varphi(x_V)-x_V)+(x_V-x)$ ニテ $\varphi(x)-\varphi(x_V)=\varphi(x-x_V)\in\varphi(U)=U$, $\varphi(x_V)-x_V\in 2V\subset 2U$, $x_V-x\in U$ ナルコトヨリ $\varphi(x)-x\in 4U$.

コレハ $\varphi(x)-x\,\overline{\in}\,4U$ ニ矛盾スルカラ $\varphi(x)=x$ デナケレバナラナイ。即チ x ハ求ムル不動点デアル。

コレデ一般ノ場合ノ定理ノ証明ガ終ル。コヽニ注意ス

ベキハ不動点ノ uniqueness ハ必ズシモ得ラレナイコトデアル。コレハ例ヘバ Γ ガ単位変換 $\varphi(x)\equiv x$ ノミヨリナル時ヲ考ヘレバ明カデアル。