

718. Jordan 領域, Stabilité と capacité (I)

井上 正雄 (阪大)

三次元空間 \mathcal{O} = 於ケル單 Jordan 閉曲面 = \mathcal{F} 圍メ
レタ有界領域ヲ \mathcal{O} , ソノ境界ヲ Σ , $F(\mathcal{O})$ \mathcal{F} 空間全体 =
テ定義サレタ實連続函数トスル。ソシテ次ノ如キ Dirich-
let ノ問題 = 問シテ régulier + = \mathcal{V} ノ領域列 $\{\mathcal{O}'_n\}$,
 $\{\mathcal{O}^2_n\}$ \mathcal{F} 者ハ \mathcal{V} 。

$$\mathcal{O} \supset \dots \supset \mathcal{O}'_{n+1} \supset \mathcal{O}'_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}'_n = \mathcal{O}$$

$$\mathcal{O} \subset \dots \subset \mathcal{O}^2_{n+1} \subset \mathcal{O}^2_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}^2_n = \overline{\mathcal{O}}$$

次 = 一般 = 領域 Ω = 於ケル境界値 f ナル調和函数
ヲ

$$H(\mathcal{O}, f, \mathcal{O})$$

= \mathcal{F} 表ハスコト = スレバ

$$\{H(\mathcal{O}, F, \mathcal{O}^i_n)\} \quad (i=1, 2)$$

ナレニ \mathcal{V} ノ調和函数列ハ夫々 \mathcal{O} 内ニ \mathcal{F} ノ調和函数 $H^{(i)}(\mathcal{O},$

$F, \vartheta) (i=1,2)^{(1)}$ = 一樣 = 収斂スルコトが解ル。 \Rightarrow カモ
 コノ函数 $H^{(i)}(z, F, \vartheta)$ ハ F ノ Σ 上 = 於ケル値ニノ
 ミ関係シ $\{\vartheta_n^i\}$ ノ撰ビ方 = ハ無関係デアアル。

此処ヲ當然問題 = ナルノハ

$$H^{(1)}(z, F, \vartheta) = H^{(2)}(z, F, \vartheta)$$

トナルカ、ドウカノ問題デアアル。本談話ハコレ = 関スル者
 察ヲアル。

先ヅ、之ノ問題ヲ局所的見地ヨリ眺メテ行カウ。
 境界点 p ノ *régularité* が

$$\lim_{z \rightarrow p} H^{(1)}(z, F, \vartheta) = F(p)$$

= テ定義サレタト同様 = 境界点 p ノ *stabilité* ナル
 モノヲ次ノ如ク定義シマウ。

定義: 連続函数 $F(z)$ ノ如何 = 拘ラズ常 =

$$\lim_{z \rightarrow p} H^{(2)}(z, F, \vartheta) = F(p)$$

ナルトキ p ハ *Stable* (*Dirichlet* ノ問題 = 関シテ)
 ノ境界点ト云フ。(2)

(1) $H^{(1)}(z, F, \vartheta)$ ハ普通 ϑ ノ境界値ヲ $F(z)$ トスル *Dirichlet*
 ノ問題ノ *solution généralisée* ト呼バレテイルモノデ
 アル。

(2) Keldyeh, Laurentieff: *Sur le problème de*
Dirichlet, C. R. 204, 1937. = 於ケル *point de*
stabilité トハ形式上果ルガ本質的 = ハ全く同一ナルコトガ
 後ヨリ解ル。又コノ報告 = ハ頁 = 色々ノ詳シイ定義ガアルガ
 コノ談話ヲ問題 = スルハコノ部分ダケデアアル。

この定義、仕方=ヨリ *régularité* = 開スル諸種ノ
 定理ガ領域ノ内部ヨリノ近似ヲ外部カテノ近似=置キ換ヘテ
 大体ソノマヨ得ラレルコトハ想像=難クナイ。事實之レハ大
 抵ノ場合成立スル。ソノコトヲ一々ココ=詳シク御紹介シ
 マウ。

境界点 p ヲ中心トシテ半径トナル開球 C_r ヲ画キ、 C_r
 = 含マレ且ツ \mathcal{Q} = 含マレガル点集合 (開集合) ヲ \mathcal{Q}_r^* ナラ
 ハス。 p ヲ通ル任意ノ平面 P_r ヲ考ヘコノ上 = \mathcal{Q}_r^* ヲ正射
 影シテ得タル開集合ノ面積ヲ σ_r トスル。

シカルトキ充分條件ヲ與ヘル次ノ定理ガ成立スル。⁽³⁾

定理 1.

海當 = $r_n \downarrow 0$, $\{P_{r_n}\}$ ヲ撰ビ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{r_n}}{r_n^2} > 0$$

ナラシメ得ルナラバ、 p ハ *stable* ナ境界点ナアル。

(証明)

定理ノ條件ヨリスマテ、 $P_n =$ 對シテ

$$\sigma_{r_n} > a r_n^2$$

ナル $a > 0$ ガ存在スルトシテヨイ。

今 $\mathcal{Q}_{r_{i+1}}^*$ 内 = 適當 = 定理ノ條件 = ヨリ $P_{r_{i+1}}$ = 平行ナル
 有限個ノ互ニ重ナリ合ハス円列ヲ画キ、ソノ面積ノ和ヲシテ

(3) Phillips, Wiener, Nets and the Dirichlet's
 problem, Journal of Math. and phys. Math
 Inst. of Tech. 1923, V. 2, N. 3.

丁度 $a r_{i+1}^2$ 十ラシトルコトが出来ル。コノ円列ヲ $b r_{i+1}$ デ表シテオカワ。

サテコノ $b r_{i+1}$ 上 = densité 1, répartition de la masse ヲ考ヘ, コレ = ヨル potentiel newtonien $V_{i+1}(z)$ ヲ考ヘル。

シカラバ $C r_i$ ノ球面 $S(C r_i)$ 上ヲハ

$$V_{i+1}(z) \cong \frac{a r_{i+1}^2}{r_i \left(1 - \frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} = \frac{a \theta_i^2 r_i}{(1 - \theta_i)}$$

$$\text{但シ } \theta_i = \frac{r_{i+1}}{r_i}.$$

$S(C r_{i+1})$ 上ヲハ

$$V_{i+1}(z) \cong \frac{a r_{i+1}}{2} = \frac{a \theta_i r_i}{2}$$

サテコノ potentiel / $b r_{i+1}$ 上ノ値ヲ考ヘル = 先ヅ條一 = $b r_{i+1}$ ノ円列ガ互ニ相接近シタ方がヨク大 = 十リ、更 = ハコレヲノ円列ガスベテ一平面上 = ヤル方が大ナルコトヲ考ヘ合スレバ $b r_{i+1}$ = 於ケル $V_{i+1}(z)$ ノ値ハ面積 $a r_{i+1}^2$ 十ル円 = densité 1, répartition de la masse ヲ考ヘコレ = ヨル potentiel, 中心 = 於ケル値ヲ越サナイコトガ判ル。實際 = コノ値ヲ計算スレバ

$$2\pi \int_0^{\theta_i r_i \sqrt{\frac{a}{\pi}}} \frac{1}{\rho} (\rho d\rho) = 2\theta_i r_i \sqrt{\pi a}$$

ヤコブ

$$W_{i+1}(z) = \frac{V_{i+1}(z) - \frac{a \theta_i^2 r_i}{1 - \theta_i}}{2\theta_i r_i \sqrt{\pi a} - \frac{a \theta_i^2 r_i}{1 - \theta_i}}$$

トスレバ (但シコト = $\theta_i < \lambda < 1$, a ヲ充分小サクトリコノ
 余母ヲ正ナラシメテオク: コノコトハ何等一般性ヲ失ハナ
 イ)

$$S(C_{r_{i+1}}) \text{上テハ } W_{i+1}(z) \leq 1$$

$$S(C_{r_i}) \text{上テハ } W_{i+1}(z) \leq 0$$

$$S(C_{r_{i+1}}) \text{上テハ } W_{i+1}(z) \geq \frac{\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{\theta_i}{1-\theta_i}\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi} - \frac{\theta_i\sqrt{a}}{1-\theta_i}} = \alpha_i$$

若シ $\theta_i < \frac{1}{3}$ ナラバ $\alpha_i > 0$,

$\theta_i \leq \frac{1}{4}$ ナラバ $\alpha_i \geq \alpha > 0$ ナル α ガ存在スル。

ナラバ p ガ stable ナルコトヲ証明スルニハ \mathcal{D} ノ境界
 Σ 上ニ連続函数ヲ與ヘ, \forall ノ連続接続ヲ $F(z)$ トスレ
 トキ

$$\lim_{z \rightarrow p} H^{(2)}(z, F, \mathcal{D}) = F(p)$$

ナルコトヲ立ハバヨイ。

任意ニ $\varepsilon > 0$ ヲ與ヘクトキ $\delta > 0$ ヲ定メ $z \in C_\delta$ ナ
 ラバ

$$|F(z) - F(p)| \leq \varepsilon$$

ナラシメ得ル。

$F(z)$ ノ最大値ヲ $\frac{M}{2}$ (全空間ニ於ケル; 之レハ有限ト
 シテモヨイ) トシ

$$v_\pi(z) = \frac{H(z, F, \mathcal{D}_\pi^2) + M}{F(p) + M - \varepsilon}$$

$$v'_n(z) = \frac{-H(z, F, \partial_n^2) + M}{-F(p) + M - \varepsilon}$$

トスレバ $v_n(z), v'_n(z) \geq \varepsilon = S(C_r) \ (r < \delta)$ 上デハ

$$\geq 0 \quad (\varepsilon \text{ハ充分小サイトシテ})$$

C_r 内ノ ∂_n^2 ノ境界上デハ

$$\geq 1$$

次ニ定理ノ條件ニ於ケル $\{r_n\}$ ノウチカラ適當ニ部分系列
(コレヲ簡單ノタメ矢張り $\{r_n\}$ ト書ク) $\{r_n\}$ ヲ次ノ如ク
撰ブコトが出来ル。

$$\delta > r_1 > 4r_2 > 4^2 r_3 > \dots > 4^n r_{n+1} > \dots$$

即チ $\frac{r_{i+1}}{r_i} = \theta_i < \frac{1}{4}$

n ヲ充分大キクトリ ∂_n^{2*} (∂_n^2 ノ余集合)ガ B_{r_2} ヲ含ム
キウニシ、コノ n ニ對シテ $v_n(z), v'_n(z)$ ヲ作り、コノ函
数ト (r_1, r_2)ヲ作ツタ函数 $W_2(z)$ トヲ比較スルコト
ニヨリ

$S(C_{r_2})$ 上デハ

$$v_n(z) \geq \alpha,$$

$$v'_n(z) \geq \alpha.$$

故ニ、次ニ

$$\frac{v_n(z) - \alpha}{1 - \alpha}, \quad \frac{v'_n(z) - \alpha}{1 - \alpha}$$

ヲ考ヘ n ヲ更ニ大キクトリ ∂_n^{2*} ガ B_{r_3} ヲ含ムキウニシ、

此ノ函数ト (r_2, r_3) 作ツタ函数 $W_3(z)$ ト比較スルバ
 $S(C_{r_3})$ 上ニハ

$$\frac{v_n(z) - \alpha}{1 - \alpha} \geq \alpha, \quad \frac{v'_n(z) - \alpha}{1 - \alpha} \geq \alpha$$

即チ $v_n(z) \geq 1 - (1 - \alpha)^2, \quad v'_n(z) \geq 1 - (1 - \alpha)^2$

コノ方法ヲ繰リ返シテ行ケバ $n < 2$ トシテヨイコトハ
 勿論ガカラ, 充分大ナル n 対シテ $(1 - \alpha)^{K-1} \leq \varepsilon$
 ナル $K = n$ 對シ

$S(C_{r_k})$ 上ニハ

$$v_n(z) \geq 1 - \varepsilon,$$

$$v'_n(z) \geq 1 - \varepsilon.$$

ナラシメ得ル。

即チ

$$\frac{H(z, F, \vartheta_n^2) + M}{F(p) + M - \varepsilon} \geq 1 - \varepsilon,$$

$$\frac{-H(z, F, \vartheta_n^2) + M}{-F(p) + M - \varepsilon} \geq 1 - \varepsilon.$$

コレヨリ

$$|H(z, F, \vartheta_n^2) - F(p)| \leq \varepsilon(2M + 1) - \varepsilon^2,$$

ϑ_n^2 , $S(C_{r_k})$ 上ニハ Γ ラヤル境界上ニハ

$$|F(z, F, \vartheta_n^2) - F(p)| \leq \varepsilon$$

且ツ, コノ不等式ハ充分大ナル n 対シテ成立スル
 故

C_{r_k} 含マレル ϑ ノ領域内ニハ

$$|H^{(2)}(z, F, \vartheta) - F(p)| \leq \text{Max.} \{ \varepsilon, \varepsilon(2M+1) - \varepsilon^2 \}$$

故 = コレヨリ

$$\lim_{z \rightarrow p} H^{(2)}(z, F, \vartheta) = F(p).$$

C. Q. F. D.

コノ定理 = ヨリ Σ が $p = \text{finite}$ 解析的 + ラバ 或ハ更 = ユ
 ルク p ヲ中心トスル内盤ガ ϑ ノ外部 = 函ケル + ラバ p ハ
stable + 境界点デアルコトガ判ル。