# 720. 確率論ヘノ積分方程式ノ應用，V（Banach 空間ニ於ケル mean ergodic theorem）

吉田 耕作（阪大）

談話 680（p. 308）ニ於テ角谷君ハ C. Visser ノ定理（談話 679）ヲ complex Banach 空間 $\mathfrak{L}$ ニ拡張サレタ。之レハ相當一般ナ結果デアルケレドモ，具体的ナ問題ニ應用スルニハ弱收斂デハ間ニ合ハナイ。考ヘ直シテミタラ、実ハ強收斂定理ガ得ラレルコトガワカリマシタ。証明モ大分簡單化サレタ様デス。

## §10. $\mathfrak{L}$ ニ於ケル mean ergodic theorem

定理　$\mathfrak{L}$ ヲ $\mathfrak{L}$ 内ニ写ス線型 operator $T$ ガ次ノ二條件ヲ満足スルトスル。即チ

(1)　$\|T^n\| \leqq$ 常数 $C$　　$(n=1, 2, \cdots\cdots)$

(2)　$\begin{cases} T \text{ ハ } \mathfrak{L} \text{ ノ単位球 } \|x\| \leqq 1 \text{ ヲ } \mathfrak{L} \text{ 内ニ於テ weakly} \\ \text{compact ナ集合ニ写ス。} \end{cases}$

然ラバ全テノ $x \in \mathfrak{L}$ ニ対シテ点列 $\{x_n\}$

$$x_n = \frac{T\cdot x + T^2\cdot x + \cdots\cdots + T^n\cdot x}{n}$$

ガ強収斂スル。

証明。　$x_n = T\cdot\left\{\dfrac{x + T\cdot x + \cdots\cdots + T^{n-1}\cdot x}{n}\right\}$。右辺ノ括弧内ハ (1) ニヨリ其ノ絶対値 $C\|x\|$ ヲ越エナイ。故ニ (2) ニヨリ或ル部分列 $\{x_{n_i}\}$ ガ $\mathfrak{L}$ ノ点 $\bar{x}$ ニ弱収斂スル。即チ全テノ linear functional $f$ ニ対シテ

(3)　$\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(\bar{x})$

所ガ (1) ニヨリ $\|Tx_{n_i} - x_{n_i}\| \leq \dfrac{2C}{n_i}\|x\|$ ダカラ $T\cdot\bar{x} = \bar{x}$ ガワカル。

従ッテ $x_n = \bar{x} + z_n$, $z_n = \dfrac{T + T^2 + \cdots\cdots + T^n}{n}(x - \bar{x})$ ヲ得ル。故ニ結局 $z_n$ ガ $0$ ニ強収斂スルコトガ云ヘレバヨイ。

偖テ $(x - \bar{x})$ ガ $(y - T\cdot y)$ ノ形デアレバ (1) ニヨリ
$\left\|\dfrac{T + \cdots\cdots + T^n}{n}(y - T\cdot y)\right\| \leqq \dfrac{2C}{n}\|y\|$ ダカラ $z_n$ ハ $0$ ニ強収

斂スル。又 $(x-\bar{x})$ ガ $(y-T\cdot y)$ ノ如キ形ノ点ノ集積点デアレバ，任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シテ $\|(x-\bar{x})-(y-T\cdot y)\|\leqq\varepsilon$ ナル如キ $y\in\mathfrak{L}$ ガ存在スル。然ラバ (1) ニヨリ

$$\left\|z_n-\frac{T+\cdots\cdots+T^n}{n}(y-T\cdot y)\right\|\leqq C\varepsilon$$

トナル。$\varepsilon$ ハ任意ダカラ上カラ結局 $z_n$ ガ $0$ ニ強収斂スル。

故ニ $(y-T\cdot y)$ ノ形ノ点ノ張ル線形閉集合ヲ $\mathfrak{L}_0$ トスルトキ $(x-\bar{x})\in\mathfrak{L}_0$ ガ云ヘルトヨイ。若シ然ラズトスレバ Banach ノ定理[1]ニヨリ次ノ如キ linear functional $f_0$ ガ存在スル:

$$f(z)=0 \quad \text{for all } z\in\mathfrak{L}_0, \quad f_0(x-\bar{x})=1.$$

然ラバ $(x-Tx)\in\mathfrak{L}_0$ カラ $f_0(x)=f_0(Tx)$. $(T\cdot x-T^2\cdot x)\in\mathfrak{L}_0$ カラ $f_0(Tx)=f_0(T^2x)$. 以下同様ニシテ $f_0(x)=f_0(T^m\cdot x)$ for $m=1,2,\cdots\cdots$.

$$\text{故ニ}\quad f_0(x)=f_0\left(\frac{Tx+T^2x+\cdots\cdots+T^n x}{n}\right) \text{ for } n=1,2,\cdots.$$

依ッテ $\bar{x}$ ノ定義 (3) カラ $f_0(x)=f_0(\bar{x})$ ヲ得ル。之レハ $f_0(x-\bar{x})=1$ ニ反スル。以上。

系．~~対応~~ $x\to\bar{x}$ ガ線型 operator $T_1$ : $\bar{x}=T\cdot x$ デ與ヘラレルコトハ明カ。$T\bar{x}=\bar{x}$ ニヨッテ $TT_1=T_1$, 從

---

(1) S. Banach: Theorie des operations lineaires. p.57.

ッテ $T^n T_1 = T_1$. 之レヨリ $T_1^2 = T_1$ ヲ得ル。又

$$\left\| \frac{T+\cdots+T^n}{n} x - \frac{T+\cdots+T^n}{n} T \cdot x \right\| \leqq \frac{2C}{n} \|x\|$$ ニヨッ

テ $T_1 T = T_1$. マトメテ

(4) $T_1^2 = T_1$, $T T_1 = T_1 T = T_1$.

$T_1$ ノ意味ハ次ノ通リデアル。任意ノ $x \in \mathfrak{L}$ ニ対シ $T(T_1 x) = (T T_1) x = T_1 \cdot x$. 又 $T \cdot y = y$ トスレバ $T^n \cdot y = y$ 従ッテ $T_1 \cdot y = y$. 故ニ $T_1$ ハ $\mathfrak{L}$ ヲ, $T$ ノ固有値 1 ニ屬スル固有空間ニ. 写ス *projection operator* デアル。

任意ノ $\lambda$, $|\lambda| = 1$, ニ對シテ $\frac{T}{\lambda}$ ガ定理ノ條件ヲ滿スカラ *strong limit* $T_\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_1^n \left(\frac{T}{\lambda}\right)^m \right\}$ ガ,上述ノ

$$T_\lambda^2 = T_\lambda, \quad T T_\lambda = T_\lambda T = \lambda T_\lambda$$

ヲ滿足スル訳デアル。此ノ系ハ角谷君ノ得ラレタノト同一デアリマス。

注意. *von Neumann* ノ *mean ergodic theorem* ハ, $\mathfrak{L}$ ガ *Hilbert* 空間, $T$ ガ *unitary* ナ場合ノ強收斂定理デアルガ, *unitary* デアレバ必然的ニ *inverse* $T^{-1}$ ガ存在スルカラ, 一般ノ *stochastic process* ニハ使ヘナイ。本定理ハ 此ノ点及ビ *Hilbert* 空間ヲ離レタコトニ於テ應用範囲ガズット廣イ訳デアリマス。