1723. 一次変換群ガ有限群ナルタメノ條件 II.

淺野　啓三（阪大）

先日 *Burnside* ノ定理ヲシラベテ見テ、ソノ結果分ッタコトデシタガ、此ノ証明ヲ少シ *modify* スレバ本誌前号 721 デ述ベタ最初ノ定理ハスグ証明サレテシマウノデシタ。ツイ不精ヲシテ始メニ *Burnside* ノ論文ヲシラベルコトヲ怠ッタタメ、前論文 I ハ要領ノ悪イ所バカリ多ク甚ダ面目ナイ次第デスガ、今一度順序ヲ立テゝ述ベテ見タイト思ヒマス。（多少重複スル部分モアリマスガ前論文 I ハ參照シナイデ始メカラヤリ直シマス）。

以下 K ヲ *Charakteristik Null* ノ *Körper* トスル。又 $\mathfrak{G}$ ヲ K ノ元ヲ組成分子トスル *grad* r ノ正規行列（行列式ノ 0 ナラザル行列）ヲ元トスル群トスル。

定理 1. <u>$\mathfrak{G}$ ガ（$\mathfrak{G}$ 自身ノ表現ト考ヘテ）完全可約（*vollständig reduzibel*）デアリ、$\mathfrak{G}$ ニ屬スル行列ノ *Spur* 全体ノ集合 $Sp(\mathfrak{G})$ ガ有限集合ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。</u>

（証明）　表現 $\mathfrak{G}$ ハ K ノ適當ナ拡大体 L ノ中デ考ヘ

テ既約表現ニ分解サレル。今 $\mathfrak{g}$ ハ始メカラ既約表現ニ分解サレテヰルト考ヘテ差支ヘナイ。然ラバ

$$A=(\overbrace{A_1,\cdots\cdots,A_1}^{m_1},\cdots\cdots,\overbrace{A_t,\cdots\cdots,A_t}^{m_t})^{(※)},\quad A\in\mathfrak{g}$$

コヽニ $A\longrightarrow A_i\ (i=1,\cdots\cdots,t)$ ハ $\mathfrak{g}$ ノ同値ナラザル既約表現デアル。今ソノ grad ヲ r_i トスル。

L ノ元ヲ係数トシテ $\mathfrak{g}$ カラ生成サレル L-Modul ヲ作レバ, Algebra ノ表現論カラヨク知ラレテヰル如ク, L ニ関スル Rang $R=\sum_{i=1}^{t} r_i^2$ ノ (halbeinfacher) Ring ヲ得ル。換言スレバ $\mathfrak{g}$ ノ中ニハ R 個ノ一次独立ナ行列ガ存在スル。コレヲ

$$A^{(\nu)}=(A_1^{(\nu)},\cdots\cdots,A_1^{(\nu)},\cdots\cdots,A_t^{(\nu)},\cdots\cdots,A_t^{(\nu)}),\quad \nu=1,\cdots\cdots,R$$

トスル。$X=(X_1,\cdots\cdots,X_1,\cdots\cdots,X_t,\cdots\cdots,X_t)$ ヲ $\mathfrak{g}$ ノ任意ノ元トスレバ

$$Sp(A^{(\nu)}X)=\sum_{i=1}^{t} m_i\,Sp(A_i^{(\nu)}X_i)=\sum_{i=1}^{t} m_i\sum_{j,k=1}^{r_i} a_{ijk}^{(\nu)}x_{ikj}.$$

$$\nu=1,\cdots\cdots,R$$

即チ R 個ノ係数 x_{ikj} ハ R 個ノ聯立一次方程式ノ解ヲナス。

(※) $A, B, C, \cdots\cdots$ ヲ行列トシ $\begin{pmatrix} A & & & 0 \\ & B & & \\ & & C & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$ ナル形ノ行列ヲ $(A, B, C, \cdots\cdots)$ デ表ハスコトニスル。

係数ノ行列式ガ 0 ニナラナイコトハ $(A_1^{(\nu)}, A_2^{(\nu)}, \cdots\cdots, A_t^{(\nu)})$ 従ッテ $(m_1 A_1^{(\nu)}, m_2 A_2^{(\nu)}, \cdots\cdots, m_t A_t^{(\nu)})$ $(\nu = 1, \cdots\cdots, R)$ ガ一次独立ナルコトカラ知ラレルカラ解ハ唯一ツデアル。

$Sp(A^{(\nu)}X)$ ハ全体トシテ有限個ヨリ存在シナイカラ X ノ係数ハ有限個ノ聯立一次方程式ノ解ヲナシ、従ッテ X ハ有限個ヨリ存在シナイ。

定理2. $\mathfrak{G}$ ガ単位行列 E 以外ニ $(X-E)^p = 0$ ヲ満足スル元 X ヲ有セズ且ツ $Sp(\mathfrak{G})$ ガ有限ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。

(証明) $\mathfrak{G}$ ハ(適當ナ拡大体ノ中デ考ヘテ)既ニ ausreduzieren サレテヰルト考ヘテ差支ヘナイ。即チ $\mathfrak{G}$ ノ元ハ

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \cdots\cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} \cdots\cdots & A_{tt} \end{pmatrix}$$

ナル形ヲ取ルモノトスル。コヽニ $A \to A_{ii}$ ハ既約表現デアル。假定ニヨリ

$$A \to \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{tt} \end{pmatrix}$$

トスレバ此ノ對應ハ isomorph デアル. ヨッテ定理1ニヨリ $\mathfrak{G}$ ハ有限群.

定理3. (Burnside) $\mathfrak{G}$ ノ元ノ Ordnung ガ beschränkt ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。

（証明）　$X = E + S\ (S \neq 0,\ S^{\rho} = 0)$ ナル行列ノ Ordnung ハ明カニ無限デアルカラ $\mathfrak{G}$ ノ中ニハ存在シナイ。$Sp(\mathfrak{G})$ ガ有限ナルコトハ $\mathfrak{G}$ ニ属スル行列ノ固有値ガ全体トシテ有限個ヨリ存在シナイコトカラ当然デアル。

定理４.（A. Weil）　$\mathfrak{G}$ ガ有限群ナルタメノ必要且充分ナル条件ハ整係数ノ Polynom $F(x)$ ガ存在シテ $F(\mathfrak{G}) \sim 0$ トナルコトデアル。（コヽニ $\mathfrak{G}^n$ ハ $\overbrace{\mathfrak{G} \times \cdots \times \mathfrak{G}}^{n}$ ナル Kronecker ノ積（但シ $\mathfrak{G}^0$ ハ単位表現）ヲ示シ、二ツ以上ノ表現ノ和ハコレヲ diagonal ニ並ベテ出来ル表現トスル。然ラバ正ノ整数ヲ係数トスル Polynom $f(x)$ ニ対シテ $f(\mathfrak{G})$ ナル表現ガ定義サレル。

次ニ $F(x)$ ヲ整係数ノ Polynom トシ，正係数又ハ負係数ノ項ヲ集メテ出来ル Polynom ヲ夫々 $f(x)$, $-g(x)$ トスル；$F(x) = f(x) - g(x)$. $f(\mathfrak{G})$ ト $g(\mathfrak{G})$ ガ同値（$f(\mathfrak{G}) \sim g(\mathfrak{G})$）ナルトキ $F(\mathfrak{G}) \sim 0$ ト書ク）

Lemma.　A, B ヲ夫々 Grad m, n ノ行列トシ，Minimalpolynom ガ夫々 $(x-1)^{\rho}$, $(x-1)^{\sigma}$ ニナルモノトスル．然ラバ Kronecker ノ積 $A \times B$ ノ Minimalpolynom ハ $(x-1)^{\rho+\sigma-1}$ デアル。

（証明）　ρ 又ハ σ ガ 1 ニ等シイトキハ明白デアル。$\rho > 1$, $\sigma > 1$ トスル．$A = E_m + S$, $B = E_n + T$,（$S^{\rho-1} \neq 0$, $S^{\rho} = 0$, $T^{\sigma-1} \neq 0$, $T^{\sigma} = 0$）

$$A \times B = E_{mn} + S \times E_n + E_m \times T + S \times T$$

$$(A\times B-E_{mn})^{k}=\sum_{\alpha+\beta+\gamma=k}\frac{k!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}S^{\alpha+\gamma}\times T^{\beta+\gamma}$$

$$(A\times B-E_{mn})^{\rho+\sigma-2}=S^{\rho-1}\times T^{\sigma-1}\neq 0$$

$$(A\times B-E_{mn})^{\rho+\sigma-1}=0$$

（定理ノ証明） $\mathfrak{G}$ガ有限群ナラバ $\mathfrak{G}$ノ同値ナラザル凡テノ既約表現ヲ $D_1, \cdots\cdots, D_l$ トスルトキ $\mathfrak{G}^n\sim\alpha_{n1}D_1+\cdots\cdots+\alpha_{nl}D_l$. ($\alpha_{nk}\geqq 0$)、コレヨリ容易ニ $F(\mathfrak{G})\sim 0$ トナル *Polynom* $F(x)$ ノ存在ガ分ル。

逆ニ $F(\mathfrak{G})\sim 0$ トスル. $F(x)=f(x)-g(x)$, $f(\mathfrak{G})\sim g(\mathfrak{G})$, 又 $f(x)$, $g(x)$ ノ *grad* ヲ夫々 m, n トスル. $m\neq n$. $\mathfrak{G}$ ニゾクスル行列 A ノ *Spur* $Sp(A)$ ハ $F(Sp(A))=0$ ヲ満ス. ヨッテ $Sp(\mathfrak{G})$ ハ有限集合。

次ニ A ヲ $\mathfrak{G}$ ニゾクスル *Minimalpolynom* $(x-1)^{\rho}$ ナル行列トシ, $A=E+S$ トスル. $S^{\rho}=0$. $\overbrace{A\times\cdots\cdots\times A}^{k}$ ノ *Minimalpolynom* ハ *lemma* ニヨリ $(x-1)^{k(\rho-1)+1}$ 従ッテ $f(\mathfrak{G})$, $g(\mathfrak{G})$ ニ於テ A ニ対応スル行列ノ *Minimalpolynom* ハ明カニ夫々 $(x-1)^{m(\rho-1)+1}$, $(x-1)^{n(\rho-1)+1}$ ニ等シイ. $f(\mathfrak{G})\sim g(\mathfrak{G})$ デアルカラ両者ハ一致シ $m(\rho-1)+1=n(\rho-1)+1$. 故ニ $\rho=1$. ヨッテ定理2ニヨリ $\mathfrak{G}$ ハ有限群。

コレカラ特ニ K ハ複素数体トスル。

定理5. $\mathfrak{G}$ ガ完全可約デ, $Sp(\mathfrak{G})$ ガ *beschränkt* ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ *beschränkt* デアル。

証明ハ定理1ノ証明ト同様デアル。

定理6. $\mathfrak{G}$ が完全可約デ, $S_p(\mathfrak{G})$ が beschränkt, 且ツ $S_p(E)$ が $S_p(\mathfrak{G})$ ノ孤立点ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。(*)

(証明) $\mathfrak{G}$ ニ属スル行列ハ凡ベテ Diagonalform ニ transform サレ且ツソノ Eigenwert ノ絶対値ハ1ニ等シイ, サモナケレバ $\mathfrak{G}$ が beschränkt ニナラナイ. 今 $\mathfrak{G}$ ニゾクスル行列ノ Eigenwert 全体 $\{\omega\}$ が無限集合ヲ作ルモノトシ, N ヲ任意ニ大ナル整数トスル。$\omega = e^{2\pi\alpha i}$ $(0 \leqq \alpha < 1)$ ト表ハサレル. 今 α ノ中無理数ニナルモノがアレバ, ソノ一ツヲ $\omega_1 = e^{2\pi\alpha_1 i}$ トスル. α が全部有理数ニナル場合ニハ、コレヲ既約分数ノ形デ表ハストキ分母が N^r ヨリ大ニナルモノが存在スルカラ、ソノ一ツヲ $\omega_1 = e^{2\pi\alpha_1 i}$ ニ取ル. ω_1 が Eigenwert トシテ現ハレル行列ノ一ツヲ A トシ、A ノ他ノ Eigenwert ヲ $\omega_k = e^{2\pi\alpha_k i}$ $(k = 2, \cdots\cdots, r)$ トスル。A ハ $\begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_r \end{pmatrix}$ ト ähnlich デアル。

サテ $0 < n_0 \leqq N^r$, $|\alpha_k n_0 - n_k| < \dfrac{1}{N}$ (**) ニ適合スル整数 $n_0, n_1, \cdots\cdots, n_r$ が存在スル。然ラバ $0 < |\alpha_1 n_0 - n_1| < 1$

(*) $\mathfrak{G}$ が beschränkt デアルカラ unitäre Matrizen ヨリ成ル群ト同値デアル. コノ事実ヲ使ヘバ定理6ハ Cartan ノ定理ニ帰着セシメラレル。

(**) コレハ Minkowski ノ定理ノ特殊ノ場合トシテ得ラレル事項デアルが, Dirichlet ノ方法デ非常ニ簡単ニ証明サレル。

$$Sp(A^{n_0}) = \omega_1^{n_0} + \cdots\cdots + \omega_r^{n_0}, \quad Sp(E) = r. \quad \omega_1^{n_0} = e^{2\pi n_0 \alpha_1 i}$$

$$= e^{2\pi(n_0\alpha_1 - n_1)i} \neq 1.$$

$$Sp(A^{n_0}) \neq Sp(E).$$

$$\left|Sp(A^{n_0}) - Sp(E)\right| \leqq \sum_k \left|\omega_k^{n_0} - 1\right| = \sum_k \left|e^{2\pi(n_0\alpha_k - n_k)i} - 1\right| < r\delta \sum_1^{\infty} \frac{\delta^{n-1}}{n!},$$

$$\delta = \frac{2\pi}{N}$$

$\varepsilon > 0$ ニ対シテ N ヲ適当ニ大ニ取ルコトニヨリ

$$|Sp(A^{n_0}) - Sp(E)| < \varepsilon, \quad Sp(A^{n_0}) \neq Sp(E)$$

ヨツテ $Sp(E)$ ガ $Sp(\mathfrak{G})$ ノ集積点ニナツテ仮定ニ反スル．故ニ $\{\omega\}$ ハ有限集合デアリ．定理２ニヨツテ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。

定理 17. <u>$\mathfrak{G}$ ガ単位行列 E 以外ニ $(X-E)^{\rho}=0$ ヲ満足スル元ヲ有セズ且ツ $Sp(\mathfrak{G})$ ガ有界デ $Sp(E)$ ガ $Sp(\mathfrak{G})$ ノ孤立点ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル</u>。

（証明）　定理２ノ証明ト同様。