724. 確率論ヘノ積分方程式ノ應用, VI, (終リ)

吉田　耕作 (阪大)

最近注目スベキ文献ガ三ッ出マシタ。

I. J. L. Doob: *Stochastic processes*

with an integral-valued parameter, Trans. Amer. Math. Soc. 44, 1 (1938) p. 87–150.

II. W. Doeblin: Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples, Bull. math. de la soc. Roumaine des sc. 39, 2 (1937) p. 3–61.

III. M. Fréchet: Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilites second livre (1938).

I ハ homogeneous ナ stochastic process ヲ可附番無限次元空間ノ測度ノ見地カラ見直シテ G.D. Birkhoff ノ ergodic theorem ヲ武器トシテ取扱ハウト云フノデアリマス。正攻法 —— orthodox デアリ堂々タル論文デアリマス。併シ其ノ一般論カラ導クタメニ、Markov chain ニ関シテ得ラレタ結果ハ，極メテ巧ミナ議論ヲシテヰルIIノ方ガズット良イ様デアリマス。

IIIハ「状態ノ数ガ有限ナ場合ノ Markov chain ニ関シテ最新ノ研究迄ヲ，数学ヲ専門トシナイ人ニモワカル様ニ平易」ニ百頁ヲ費シテ書イテアリマス。色々ナ細イコトヲ知ルコトガ出来テ便利デスガ、百科全書的デ良書デハアリマセウガ決シテ名著トハ思ヘマセン。

以下ニハ I, II ヲ参考シテ，前談話ノ定理ニヨリ状態ノ

数ガ無限ナル場合ノ Markov chain ヲ少シ調ベテミマス。次ニハ Fréchet ノ書物ニ於ケル essential ナル結果ト談話 679 ノ定理トノ関係ヲ述ベマス。

尚角谷氏ハ Doeblin ノ論法ヲ一般ニシテ Kryloff ト Bogoliouboff ノ所論 (Ann. of Math. 38, 1 (1937)) ヲ「流レ」ノミナラズ Markov process ヲモ含ムハッリニヤリ直セルコトヲ見出サレマシタ。線型 operator 反核ノ見地カラ取扱ヘル homogeneous stochastic process ノ大事ナ文献モ Birkhoff ノ ergodic theorem ニ関スルモノヲ除ケバ大体恐シタ様デスカラ談話ハ一先ヅ之デ打切リマス。(1)

最後ニ談話ニ一方ナラヌ御助力ヲ受ケタ角谷靜夫氏ニ厚ク感謝致シマス。

§11. レッノ收斂定理
(Markov 定理ノ extension)

<u>定理</u>. $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ ニ於テ可測ナ函数 $p(x, y)$ ガ i) $p(x, y) \geqq 0$ 且ツ $\int_0^1 p(x, y)\, dy = 1$ ii) $\overline{\mathcal{E}}_i \supseteq \overline{\mathcal{E}}_{i+1}$, $\lim\limits_{i\to\infty} mes(\overline{\mathcal{E}}_i) \to 0$ ナル任意ノ可測集合ノ系列 $\{\overline{\mathcal{E}}_i\}$ ニ對シ, x ニ関シテ一様ニ $\lim\limits_{i\to\infty} \int_{\overline{\mathcal{E}}_i} p(x, y) = 0$

---

(1) A. Khintchine ト A. Kolmogoroff ノ Birkhoff ergodic theorem ノ研究ハ又機會ニ報告シタイト思ッテヲリマス。

ヲ満足スルトスル。然ラバ（$0, 1$）ニ於テ積分可能ナ任意ノ $f(x)$ ニ対シ

$$f_n(y)=\int_0^1 f(x)\frac{p(x,y)+p^{(2)}(x,y)+\cdots\cdots+p^{(n)}(x,y)}{n}\,dx \qquad [1]$$

ガ（L ノ意味デ）強収斂スル。即チ $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|f^*(x)-f_n(x)\right|dx$ トル如キ積分可能ナ $f^*(x)$ ガ存在スル。[2]

注意 1. 簡単ノタメ（$0,1$）デ考ヘタノデアルガ，之ハモット一般ニ出来ルコトハ明カデアル。

注意 2. Doob (loc. cit.) ハ $\frac{1}{n}\{p(x,y)+\cdots\cdots+p^{(n)}(x,y)\}=p_n(x,y)$ ガ x ヲ fix シストキ y ノ函数トシテ弱収斂スルコト，即チ任意ノ可測集合 E ニ対シテ $\lim_{n\to\infty}\int_E p_n(x,y)\,dy$ ノ存在ヲ云ッテヲリマス。上定理ハズット precise デアリマス。[3]

---

(1) $p^{(n)}(x,y)=\int_0^1 p^{(n-1)}(x,z)\,p(z,y)\,dz,\quad p^{(1)}(x,y)=p(x,y).$

(2) 條件 ii) ハ点 x ガ点 y ニ移ル遷移確率ガ x ニツイテ"一様"ナコトヲ要求シテヲルノデアル。

(3) Doeblin (loc. cit.) ハ ii) ヨリユルイ條件（§12 ヲミラレヨ）ノモトニ $\lim_{n\to\infty}\int_E p_n(x,y)\,dy$ ノ収斂速度マデ出シテヲリマス。我々ノ定理トハ互ニ含ミ合ッテヲリマセン。Doeblin ノ論文ヲ又精シク検討スベキ仕事ガ我々ニ残サレテヰル訳デス。

証明:　区間 $(0,1)$ ニ於テ積分可能ナ函数全体 L ハ絶対値 $\|f\|=\int_0^1|f(x)|dx$ ノ意味デ Banach 空間 $\mathfrak{L}$ ヲ作ル。Fubini ノ定理ニヨリ

$$\int\left|\int f(x)\,p(x,y)\,dx\right|dy \leq \int|f(x)|\left\{\int p(x,y)\,dy\right\}dx$$
$$=\int|f(x)|\,dx=\|f\|$$

ヲ得ルカラ線型函数変換 $T\cdot f(x)=g(y)=\int_0^1 f(x)\,p(x,y)\,dx$ ハ $\mathfrak{L}$ ヲ $\mathfrak{L}$ 内ニ写シ且ツ $\|T\|\leq 1$ デアル。実ハ $\|T\|=1$ ナルコトハ $f(x)\equiv 1$ トスレバスグワカル。ヨッテ $\|T^n\|\leq 1$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$。

Steinhaus ノ定理[1]ニヨリ L ハ weakly complete デアルカラ，単位球 $\|f\|\leq 1$ ノ T ニヨル像ガ weakly compact ナコトヲ云フニハ，$\|f_i\|\leq 1$ ヲ満足スル系列 $\{f_i\}$ ノ T ニヨル像ガ weakly convergent ナ部分列 $\{f_{i'}\}$ ヲ含ムコトガ云ヘレバヨイ。L ノ conjugate space ハ M（$(0,1)$ デ有界且ツ可測ナ函数ノ全体）ダカラ[2]，結局 $\underset{0\leq x\leq 1}{\mathrm{l.u.b.}}|\alpha(x)|\leq 1$ ナル如キ全テノ可測函数ニ対シ

$$\int\alpha(y)\left\{\int f_{i'}(x)\,p(x,y)\,dx\right\}dy$$

ガ $i'\longrightarrow\infty$ ト共ニ収斂スル。

---

(1) S. Banach: Théorie des opérations linéaires.

(2) S. Banach: loc. cit. p.

ナル如キ $\{f_{i'}\}$ ガ撰ベルトヨイ。所ガ再ビ Fubini ノ定理ヲ使フト上ノ積分ハ $\int f_{i'}(x)\left\{\int \alpha(y)\,p(x,y)\,dy\right\}dx$ ト書ケルカラ $\int \alpha(y)\,p(x,y)\,dy$ ノ全体ガ M ノ絶対値（函数ノ絶対値ノ maximum）ノ意味デ separable ナコトガ云ヘレバヨイ。何者，ソウスレバ $\{f_i(x)\}$ = Diagonal verfahren ニヨッテ $\{f_{i'}(x)\}$ ガ得ラレル。偖

$\beta(x)=\int \alpha(y)\,p(x,y)\,dy$ ノ形ノ函数全体ノ separability ノ証明。

l. u. b. $|\alpha(y)|\leqq 1$ ダカラ，$\alpha(y)$ ハ全テ，$(0,1)$ 内ノ有理数ヲ端点トスル区間デ絶対値 1 ヲ越エナイヤウナ有理数値ヲトル階段函数 $\gamma(y)$ デ L ノ絶対値ノ意味デ，如何程デモ近似シ得ル。$\gamma(y)$ ノ全体ハ明カニ可附番デアル。故ニ $\alpha(y)$ ニ対シ $\lim_{n\to\infty}\int|\alpha(y)-\gamma_n(y)|\,dy=0$ ナル如キ系列 $\{\gamma_n(y)\}$ ガ存在スル。

偖テ正整数 i ニ対シ上カラ $\int|\alpha(y)-\gamma_n(y)|\,dy\leqq\frac{1}{2^{2i}}$ for $n\geqq n_i$ ナル如キ n_i ガ定マル。$|\alpha(y)-\gamma_{n_i}(y)|>\frac{1}{2^i}$ ナル如キ y ノ集合ヲ $\mathcal{E}_i$ トスレバ $mes(\mathcal{E}_i)\leqq\frac{1}{2^i}$。

今 $n_1<n_2<n_3<\cdots\cdots$ ナル如ク n_i ヲ定メタトスレバ，

$\overline{\mathcal{E}}_i=\sum_{j=i}^{\infty}\mathcal{E}_j$ ニ属サナイ y デハ $|\alpha(y)-\gamma_{n_i}(y)|\leqq\frac{1}{2^i}$。

且ツ $\overline{\mathcal{E}}_i$ ノ点 y デハ $|\alpha(y)-\gamma_{n_i}(y)|\leqq|\alpha(y)|+|\gamma_{n_i}(y)|\leqq 2$。

$\overline{\mathcal{E}}_i\geqq\overline{\mathcal{E}}_{i+1}\geqq\cdots$ 且 $mes(\overline{\mathcal{E}}_i)\leqq\sum_{j=i}^{\infty}mes(\mathcal{E}_j)\leqq\frac{1}{2^{i-1}}\to 0$

$i \to \infty$。故ニ定理ノ仮定 i), ii) ニヨリ

$$\left| \int \alpha(y) p(x,y)\,dy - \int \gamma_{n_i}(y) p(x,y)\,dy \right|$$

$$\leqq \int \left| \alpha(y) - \gamma_{n_i}(y) \right| p(x,y)\,dy$$

$$\leqq \int_{\bar{\varepsilon}_i} 2p(x,y)\,dy + \frac{1}{2^i} \int_{(0,1)-\bar{\varepsilon}_i} p(x,y)\,dy \to 0 \quad \text{as } i \to \infty.$$

斯クシテ $\beta(x)$ 全体ノ中デ，$\beta'(x) = \int \gamma(y) p(x,y)\,dy$ ノ形ノ可附番個ノ函数ガ $\mathfrak{M}$ ノ意味デ überall dicht ナコトガワカッタ。 —— 以上 ——

前談話ノ定理ニヨレバ $T_\infty \cdot f(x) = \int_0^1 f(x) p_\infty(x,y)\,dx$ ナル線型 operator ハ，T ノ固有値 1 ニ属スル固有空間ヘノ projection デアル。ヨッテ次ノ如キ確率論的解釈ガ下サレル：

n 単位時間ノ後ニ x ガ y ニ移ル遷移確率密度ガ $p^{(n)}(x,y)$ デ与ヘラレル如キ Markov process ヲ考ヘル。$f(x) \geqq 0$，$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ ナル如キ密度分布 $f(x)$ ハ，time ニ関スル Césaro 平均ノ意味デ，stable ナ密度分布 $f^*(x)$ ニ収斂スル。即チ

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) p_n(x,y)\,dx = \int_0^1 f(x) p_\infty(x,y)\,dx = f^*(y),$$

$$\int_0^1 f^*(x) p(x,y)\,dx = f^*(y).$$

又明ニ $\int_0^1 p_\infty(z,x) p(x,y)\,dx = p_\infty(z,y)$ ガ成立スルカ

ヲ, zヲ fix シタトキ $p_\infty(z,x)$ ハ x ノ函数トシテ一ツノ stable ナ密度分布ヲ与ヘル。projection ト云フコトカラ, 任意ノ stable ナ密度分布 $f(x)$ ハ $\int_0^1 f(x)p_\infty(x,y)\,dx = f(y)$ ヲ満足スル。之レハ任意ノ stable ナ密度分布 $f(y)$ ガ special ナ $p_\infty(x,y)$ ノ x ニ関スル convex closure トシテ得ラレルコトヲ示ス。

§12. Doeblin ノ條件ノ導入

以下 $p(x,y)$ ハ ii) ノ代リニモツトユルイ次ノ條件ヲ満足スルモノトスル:

$\boxed{\text{Doeblin ノ條件}}$ 正数 b, η ガ存在シテ, mes$(E) \leq \eta$ ナラ x ニ関シテ一様ニ

$$\int_E p(x,y)\,dy \leq 1-b.$$

然ラバ

$\boxed{\text{定理}}$ T ノ固有値 1 ハ其ノ multiplicity 有限デアル。

証明: 若シ然ラズトスレバ, §3 ト全ク同様ニシテ[1]

$$(*)\begin{cases} \varphi_i(x) \geqq 0,\ \int_0^1 \varphi_i(x)\,dx = 1,\ \int_0^1 \varphi_i(x)p(x,y)\,dx = \varphi_i(y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{fast überall ニ等シイ}) \\ \varphi_i(x)\varphi_j(x) \equiv 0 \quad (i \neq j) \end{cases}$$

---

(1) §3 ニハ誤リガアッタ. 談話 679 ニ訂正シテヲキマシタ.

ナル如キ可附番個ノ函數列 $\{\varphi_i(x)\}$ ガ得ラレル。之ガ不合理ナコトヲ云フトヨイ。

$\varphi_i(x)>0$ ナル x ノ集合ヲ $\mathcal{E}_i$ トスルト，$\mathcal{E}_i$ ト $\mathcal{E}_j$ $(i\neq j)$ ハ共通点ヲモタヌ。然ルニ $mes(\mathcal{E}_i)\leq\eta$ トスルト，

$$1=\int_{\mathcal{E}_i}\varphi_i(y)\,dy=\int_{\mathcal{E}_i}dy\left\{\int_{\mathcal{E}_i}\varphi_i(x)\,p(x,y)\,dx\right\}$$ カラ

Fubini ノ定理ニヨリ $1\leq\int_{\mathcal{E}_i}(1-b)\varphi_i(x)\,dx=1-b$ ナル矛盾ヲ得ル。故ニ $mes(\mathcal{E}_i)>\eta$ デナケレバナラヌ。然ラバ $\{\varphi_i(x)\}$ ガ可附番無限個デハ困ル。ヨッテ実ハ上ノ如キ φ ハ $\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots,\varphi_k$ ト有限ノ所デ切レル可キデアル。

系. §3 ノトキト同様ニシテ $T\cdot f(x)=f(y)$, $f(x)\geq 0$ ナル任意ノ $f(x)$ ハ $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\cdots,\varphi_k(x)$ ノ non-negative ナ係數ニヨル一次結合トシテ表ハサレル。z ヲ fix スルト $p_\infty(z,x)$ ハ明カニ斯ル $f(x)$ ダカラ $p_\infty(z,x)=\sum_{i=1}^{k}c_i(z)\varphi_i(x)$, $c_i(z)\geq 0$. 所ガ

$$\int_0^1 p_\infty(z,x)\,dx\equiv 1$$ ダカラ $\sum_{i=1}^{k}c_i(z)\equiv 1$. 故ニ§3ト同ジク次ノ如キ解釋ガ下サレル：

最初 $\mathcal{E}_i$ ニアッタ点ハ何時迄モ確実ニ $\mathcal{E}_i$ 内ニ止ル。(0,1) 上ノ任意ノ点ハ，Césaro 平均ノ意味デ時間ノ増スト共ニ $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\cdots\cdots,\mathcal{E}_k$ ノ何レカニ確実ニ入ル。

今一ツ§1ノ Lemma 2ト同ジ様ニシテ

$\boxed{\text{定理}}$ $\mathfrak{M}$ノ点ヲ$\mathfrak{M}$ノ点ニ移ス線型 operator T: $\mathsf{T}f(y)=\int_0^1 p(x,y)f(y)\,dy=g(x)$ ヲ考ヘル。然ラバTノ絶對値1ノ固有値 λ ハ $\lambda^n=1$ (n整数) ヲ満足スル。

尚 $p^{(n)}(x,y)$ ノ收斂ト T ノ絶対値1且ツ1ニ等シクナイ固有値ノ不存在トノ関係モ Doeblin ノ集合論的論法ヲ踏襲スレバ出セマスが，論法が積分方程式トレ寸離レルノデ止メテヲキマス。當然積分方程式流(?)ノ証明がデキル答デス。デキタラ又御報告シマス。

§13. Fréchet ノ書物カラ

$p_{ij}\geqq 0$ 且ツ $\sum_{j=1}^{n}p_{ij}=1$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ満足スル行列 (p_{ij}) ノ m 乗 $(p_{ij})^m=(p_{ij}^{(m)})$ ノ $m\to\infty$ ニ於ケル asymptotic ナ状態ヲ考ヘマス (§10 参照セラレタシ。) 上記 Fréchet ノ書物ニハ次ノヽヲナ分類が與ヘラレテアリマス。

1) $\lim_{m\to\infty}(p_{ij})^m$ ノ存在スル場合。コノタメノ必充條件ハ (p_{ij}) が1以外ニ絶対値1ノ固有値ヲモタヌコトデアル。

2) regular case 上ニ於テ $\lim_{m\to\infty}p_{ij}^{(m)}$ $(i,j=1,2,\cdots\cdots,n)$ がイヅレモ最初ノ suffisc i = independent ナ場合。コノタメノ必充條件ハ 1) ニ於ケルモノノ他ニ，1 が (p_{ij}) ノ simple ナ固有値ナル

コトデアル。

3) positive regular case. 上ニ於テ $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$ ガ全テ >0 ナル場合。コノタメノ必充條件ハ 2) ニ於ケルモノノ他ニ，(p_{ij}) ノ固有値 1 ニ屬スル固有ヴェクトルノ成分ガ全ベテ $\neq 0$ ナルコトデアル。

4) the most regular case. 2) ニ於テ $\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)}$ ガ全ベテ i ニモ j ニモ independent ナ場合。コノタメノ必充條件ハ 2) ニ於ケルモノノ他ニ，

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ik} = 1 \quad (k=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ノ成立スルコトデアル。

以上ノ條件ハ全テ談話 679 ノ定理カラタヤスク出セマス。念ノタメニ定理ヲ今一度述ベマスト，

complex Banach 空間 $\mathfrak{L}$ ノ線型 operator T ガ (i) $\|T^m\| \leqq 1$ $(m=1,2,\cdots\cdots)$，(ii) 整数 k 及ビ vollstetig ナ線型 operator V ガ存在シ $\|T^k - V\| < 1$，然ラバ vollstetig ナ線型 operator $T_1, T_2, \cdots\cdots, T_l$ 及ビ線型 operator S ガ

$$\begin{cases} T = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i T_i + S, \quad T_i^2 = T_i, \ T_i T_j = 0 \ (i \neq j), \\ T_i S = S T_i = 0 \\ \|S^m\| \leqq \beta/(1+\varepsilon)^m \qquad (\beta, \varepsilon \text{ 正数}; \ m=1,2,\cdots\cdots) \end{cases}$$

ナル如ク存在スル。コヽニ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_l$ ハ T ノ絶対値 1 ノ固有値。

證明: $T=(p_{ij})$トヲクト, 任意ノmニ對シ

$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(m)}=1$, $p_{ij}^{(m)}\geq 0$ ハ明カダカラ T ハ條件 (i), (ii) ヲ滿足スル。[1] ヨッテ定理ハソノマヽ使ヘル。

故ニ 1) ハ明カ。 2) ハ次ノヤウニシテワカル。$x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ ヲ任意ノベクトルトスルト假定カラ

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(m)} x_j$$

ハ i ニ independent. 今ハ勿論 1) ノ case ダカラ之ハ, T ノ固有値 1 ニ屬スル固有空間ガ 1 次元ト云フコトニナル。何若, $\lambda_1=1$ トスルト上式ハベクトル的ニ書クト $(\lim_{m\to\infty} T^m)\cdot x = T_1 x$ トナリ, T_1 ハ定理カラ明カニ T ノ固有値 1 ニ屬スル固有空間ヘノ projection ダカラ。従ッテ 3) モ亦明カ。

4) ハ次ノコトカラワカル。$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)}=\frac{1}{n}$ ハ假定カラ明カ。然ラバ $p_{ik}^{(m+1)}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(m)} p_{jk}$ ニ於テ $m\to\infty$ ナラシメルト $\frac{1}{n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}p_{jk}$ 即チ $\sum_{j=1}^{n} p_{jk}=1$ ヲ得ル。逆ニ 2) ノ條件ノ他ニ $\sum_{j=1}^{n} p_{jk}=1$ ガ成立シタトスルト Transposed matrix $T'=(p'_{ij})$, $p'_{ij}=p_{ji}$, ガ亦定理ノ條件ヲ滿足スル。T ガ 2) ノ條件ヲ滿足スルト T' ガ亦 2) ノ條件ヲ

---

(1) 有限次元ノ行列ハ勿論 vollstetig.

満足スルカラ $\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)}$ モ $\lim_{m\to\infty} p'^{(m)}_{ij}$ モ最初ノ suffix

i ニ independent. 即チ $\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)}$ ハ i ニモ j ニモ

independent. ― 以上 ―

注意. Fréchet ハ尚 Césaro 平均 $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} p_{ij}^{(k)}$

ヲ問題ニシテ semi-regular, semi-positive-regular, semi-most-regular 等ノ case ヲ定義シソレラ case ノタメノ條件ヲ與ヘテヲリマスガ, 之レモ定理ニヨリ上ト同ジヤウニシテ求メラレマス。尚定理ニヨレバ積分 operator $\int p(x,y) f(x) dy$ ($p(x,y) \geqq 0$, $\int p(x,y) dy \equiv 1$) ノ iteration ノ場合ニモ上ノ如キ分類並ビニ條件ノ出セルコトハ明カデス(談話 679 参照)。同ジ様ニ出キマスカラ繰り返シマセン。

原稿ヲ書イテカラ J. Hadamard et M. Fréchet: Sur les probabilités discontinues des événements "en chaine", Zeitsch. für angew. Math. und Mech. 13 (1933) p. 92–97 ノ存在ヲ知リマシタ。少シ古イデスガ状態ノ数ノ有限ナ場合ノ Markov chain ニ関スル, 簡ニシテ要ヲ得タ総合報告デス。