726. 確率法則ノ分解問題, I

北川　敏男（阪大）

§1. 本誌682号ニ於テ彷徨函数（*random functions*）ノ紹介ヲ試ミタ。ソノ「結ビ」ニ於テ附言シタ如ク、彷徨函数ノ理論ハコレヲ、モット一般ノ確率現象ノ特別ノ場合トミルコトニヨリソノ意味ガハッキリシテ来ル．ソノ

確率現象トイフノハ, *Lévy*, *Khintchine* ノ盛ンニ研究シテ居ル無限ニ分解可能ナ確率法則 (*Lois indéfiniment divisibles*) デアル。更ニコノ数年来ノ傾向トシテ、無限ニ分解可能ナ確率法則ノ研究カラ進ンデ、一般ノ確率法則ノ分解問題ニ漸近論及シツツアルノガ、コノ方面ノ現状デアル。以下、ソノ概略ヲ紹介シヨウト思フ。

§2. 基本的ナ準備事項

以下特別ノ断リノナイ限リ、専ラ、一次元ノ確率変数, 即チソノトル値ガ実数デアルヤウナ確率変数ノミヲ問題トスル。確率変数ヲ X, Y 等デ表ハス。

(I) 分布函数 $P_r[X \leqq x] = F(x)$ ニヨリ、或ハソノ特性函数 (*fonction caractéristique*)

$$(1) \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

ニヨリ、X ノ確率法則 $\mathcal{L}$ ヲ定義スル. X_1, X_2 ノ特性函数ヲ夫々 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ トスレバ, X_1, X_2 ガ独立ナトキニハ, $X_1 + X_2$ ノ特性函数ハ $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ デアルカラ、X_1, X_2, $X_1 + X_2$ ノ確率法則ヲバ $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}$ トスルト, 標記的ニ

$$(2) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \quad (\equiv \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2)$$

ナル記法ヲ用ヒテモ宜シカロウ。コノトキ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1$ ト書イテモヨイ。[$\varphi_1(t)\varphi_2(t) = \varphi_2(t)\varphi_1(t)$ ダカラ]. 凡ベテノ確率法則ノ集合 K ハ, ソノ任意ノ二ツノ元ニ対シテ上記ノ意味ノ乗法ガ定義サレ、ソノ乗法ハ可換デアル。

吾々ハ1ナル記号ニヨリ、スベテノ $\mathcal{L}$ ニ対シテ $\mathcal{L}\times 1 = \mathcal{L}$ トナル確率法則ヲ意味スル。カヽル1ヲ確率法則トスル確率変数ハ，0ノミヲバ唯一ツノ可能値トスルモノ、即チ $\mathfrak{X} \equiv 0$ デアルコトが容易ニワカル。

次ニ、$\mathcal{L}$ が単位法則（loi unité）トイフノハ，$\mathcal{L}\mathcal{L}'=1$ トナルヤウナ確率法則 $\mathcal{L}'$ ノ存在スルトキニイフ。カヽル単位法則ノ特性函数ハ e^{mit} ナル形ヲトルコトがイヘル。〔ソレヲ証明スルニハ，$\mathcal{L}$ ニ従フ確率変数 $\mathfrak{X}$ が二個以上ノ相異ル値ヲトルトスルト，$\mathcal{L}\mathcal{L}'$ 又ソウデナケレバナラズ，コレハ $\mathcal{L}\mathcal{L}'=1$ ニ反スル〕ソコデコノ法則ヲ $\mathcal{U}^m$ デ表ハサウ。（$\mathcal{U}$ ハ $m=1$ ニ対應スルモノト考ヘテ）。

一般ニ、$\mathcal{L}$ ノ特性函数ヲ $\varphi(t)$ トスルトキ，若シ $\varphi^{\alpha}(t)$ ヲ特性函数ニスル確率法則が存在スレバ，コレヲ $\mathcal{L}^{\alpha}$ ヲ以テ表ハス。

（II）平均散縮度（dispersion moyenne）任意ノ確率分布 $F(x)$ ニ対シテ

$$(3)\quad Q(l) = \underset{-\infty<x<\infty}{Max.}\left[F(x+l+0)-F(x-0)\right]$$

$$(0<l<\infty)$$

が存在スル。コレハ長サ l ノ閉区間ニ対應スル密度ノ最大値デアル。ソノ逆函数 $l=\omega(\alpha)$ ヲ称シテ dispersion（假リニ散縮度ト訳サウ）トイフ、コレハ $0<\alpha<1$ デ定義サレテ居ッテ、明カニ單調非減少デアルが $\omega(1-0)=+\infty$ ト

ナルカモ知レナイカラ、必ズシモ $\int_0^1 \omega(\alpha)\,d\alpha$ ハ存在シナイ恐レガアル。ヨッテ、$\omega(\alpha)$［$0<\alpha<1$］ノ平均値即チ、平均散縮度トイフベキモノトシテ、*Lévy* ハ、$\lambda(\omega)$ トイフ、$\omega>0$ デ定義サレ、連続，単調純増加デ且ツ $\omega(0+)$, $\omega(+\infty)$ ガ共ニ有限ナルヨウナ函数ヲ導入シテ、［例ヘバ，$\omega/\sqrt{1+\omega^2}$，又ハ $\omega/1+\omega$ ナドヲトレバヨイ］、コレニヨッテ

$$(4)\qquad \delta_\lambda(\mathcal{L})=\lambda^{-1}\left\{\int_0^1 \lambda[\omega(\alpha)]\,d\alpha\right\}$$

ヲ定義シ，コノ $\delta_\lambda(\mathcal{L})$ ヲ以ッテカク稱シス。コノ $\delta_\lambda(\mathcal{L})$ ハ補助ニ用ヰタ函数 λ ニヨリ、一般ニコトナル値ヲトルケレドモ，スベテノ確率法則ニ対シテ、同ジ λ ヲ用ヰルコトニスレバ，以下ノ議論ニハ，λ ハ上記ノ條件ヲ充スカギリ何デアッテモヨイ。ソコデ $\delta_\lambda(\mathcal{L})$ トハ書カズ，単ニ $\delta(\alpha)$ 又ハ δ ト書カウ。

平均散縮度ハ次ノ重要ナ性質ヲモツ：$\mathcal{L}=\mathcal{L}'\mathcal{L}''$ ニシテ、$\mathcal{L}''$ ガ単位法則デナケレバ，$\delta(\mathcal{L})>\delta(\mathcal{L}')$。コノ事実ヲ換言スレバ，独立ナ確率変数ヲ加フル度ニ、平均散縮度ハ，*trivial* ナ場合（単位法則ヲモツ確率変数ヲ加フル場合）ヲ除イテハ，確カニ増加スル。コレヲ平均散縮度増加ノ原理ト呼ブ。

独立ナ確率変数ヲ加フル度ニ，ソノ結果増加スルモノトシテハ，標準偏差ガアル。シカシ、コレハスベテノ分布函数ニツイテ存在スルト限ラナイモノデアル。*Liapounoff*, Kolmogoroff 等ノ盛ンニ用ヰタニモ係ラズ標準偏差ハコノ点ニ缺点ガアル。コレヲ、上ノ如キ平均散緒度デオキカヘタノハ Lévy ノ功トイッテ宜シカロウ。

(III) 独立ナ確率変数ノ系列 $\{X_k\}$ ニ於テ $\sum_{k=0}^{n} X_k$ ノ法則 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \cdots\cdots \mathcal{L}_n$ ガ $n \to \infty$ ノトキ如何ナル behaviour ヲナスカニ就イテハ、Lévy ノ研究ガアル。

適当ナ常数列 $\{a_k\}$ ヲトッテキテ $\sum_{k=1}^{n}(X_k - a_k)$ ヲツクルト、コノ確率変数ノ法則ガ $n \to \infty$ ノトキ、或ル確率法則ニ収斂スルナラバ、$\sum_{k=1}^{\infty} X_k$（又ハ $\prod_{k=1}^{n} \mathcal{L}_k$）ハ法則収斂ニ帰セシメウルト云ヒ、如何ニ $\{a_k\}$ ヲトッテ来テモ上記ノコトガ不可能ナラバ、$\sum_{k=1}^{\infty} X_k$（又ハ $\prod_{k=1}^{n} \mathcal{L}_k$）ハ法則収斂ニ帰セシメ得ナイト云フ。或ハ、夫々 quasi-convergente, essentiellement divergente トモイフ。コレラハ次ノ如ク特徴付ケラレル：

$$(5)\quad \begin{cases} (1^\circ) & \lim\limits_{n\to\infty} \delta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \cdots\cdots \mathcal{L}_n) < \infty \text{ ナラバ quasi-conv.} \\ (2^\circ) & \lim\limits_{n\to\infty} \delta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \cdots\cdots \mathcal{L}_n) = \infty \text{ ナラバ essent. div.} \end{cases}$$

以上ヲ先ヅ準備トシテ述ベテ置ク。

§3. K ノ構造ニ関スル Khintchine ノ基本定理.

或ル確率法則 $\mathcal{L}$ ガ分解不可能（indécomposable）トイフノハ、共ニ単位法則デナイ $\mathcal{L}', \mathcal{L}''$ ニ依ッテ、$\mathcal{L} = \mathcal{L}'\mathcal{L}''$ トシテ表ハス事ガ不可能ナコトヲ意味スル。

或ル確率法則 $\mathcal{L}$ ガ無限ニ分解可能（indef.

divisible)トイフノハ, $\varepsilon>0$ ヲ如何ニ與フルトモ, 次ノヤウナ確率法則 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots\ldots, \mathcal{L}_n$ ガ選ベルコトヲイフ:

$$(6)\quad \begin{cases} (1^\circ) & \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \cdots\cdots \mathcal{L}_n \\ (2^\circ) & \delta(\mathcal{L}_k) < \varepsilon \qquad (k=1,2,\ldots\ldots,n) \end{cases}$$

コレラノ概念ノ重要ナコトハ次ノ定理ニ窺ハレマス:

<u>定理 1</u>. (*Khintchine*) 凡ベテノ確率法則 $\mathcal{L}$ ハ必ズ次ノ形ニ表ハシ得ル: $\mathcal{L} = \mathcal{L}'\mathcal{L}''$, 但シ, 茲ニ $\mathcal{L}'$ ハ或ル分解不可能ナ確率法則ノ有限個又ハ無限個ノ積デ $\mathcal{L}''$ ハ, 無限ニ分解可能ナ或ル確率法則ヲ表ハス。

コノ定理ノ証明ニ先立テ、次号ニ於テハ分解不可能ナ確率法則、又無限ニ分解可能ナ法則トハ如何ナルモノカヲ調べヨウ。 ——(續ク)——