730. 確率法則ノ分解問題，II

北川　敏男（阪大）

概要：　I ニ於テ、無限ニ分解可能ナ確率法則ノ定義ヲ與ヘタ、今回ハコレニ關スル所謂 Lévy ノ公式（定理 2 及ビ定理 3）ヲ證明スル。コノ公式（或ハ表現ト云ッタ方ガヨリ適切カモ知レナイ）ヲ利用スレバ，無限ニ分解可能ナ確率法則ノスベテカラナル集合 $\mathfrak{G}$ ニ於ケル分解問題ニツイテ簡明ナ結果ガ得ラレル（定理 4）。

§3. 無限ニ分解可能ナ確率法則

定理 2. $-\infty < t < \infty$ デ定義サレタ函數 $f(t)$ ガ、無限ニ分解可能ナ確率法則[1] ノ特性函數デアルタメノ必要充分條件ハ，$-\infty < t < \infty$ デ

$$(7)\quad f(t) = \exp.\left\{ imt - \frac{\lambda t^2}{2} + \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\right)\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dn(u) \right\}$$

トシテ表ハサレ，且ツ茲ニ

$$(8)\quad \begin{cases} 1^\circ.\ m \text{ ハ実数},\ \lambda \geqq 0. \\ 2^\circ.\ n(u) \text{ ハ } (-\infty, 0),\ (0, \infty) \text{ ニテ非減少デ，} n(\pm\infty) \text{ ハ共ニ有限デ，且ツ } u \text{ ノ} \\ \quad \text{任意ノ有限区間デ } \int u^2\, dn(u) < \infty \end{cases}$$

トナル事デアル。

(1) 定義ハ前回，§2 デ述ベタ。

注意: $\mathcal{L}$, L_1, L_2, $\mathcal{L}_u$ ニ依ツテ夫々 $f(t)$, $\exp(it)$, $\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$, $\exp\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)$ ヲバ特性函数トスル確率法則ヲ表ハシ, (7) ヲバ標記的ニ次ノ如クモ書ク:

$$\mathcal{L}=L_1^{m}L_2^{\lambda}\prod\mathcal{L}_u^{dn(u)} \tag{7'}$$

コノ注目スベキ結果ニ到達シタ歴史的経路ハ, P. Lévy ノ独立ナ確率変数ノ積分 (Les intégrales a éléments aléatoires indépendants) ニ関スル一般的研究デアッタ。シカシコノ紹介デハ, 一般ノ分解問題ヲ中心トシタノデアルカラ、P. Lévy ノ Original[2] ヲソノマヽ此処ニ紹介スルノハ, 餘計ナ道具立テヲスルマウデ面白クナイ。定理2ノ極メテ簡潔ナ証明ガ昨年 Khintchine[3] ニ依ツテ與ヘラレタガ, コレハ次ノ定義カラ出発シテ居ル。

定義 1. 任意ノ自然数 n ニ対シテ $[f(t)]^{\frac{1}{n}}$ ガ、或ル確率法則ノ特性函数デアルトキ、$f(t)$ ヲ特性函数トスル確率法則ニ無限ニ分解可能ナクトイフ。

---

(2) P. Lévy: Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. Ann. d. R. S. N. d. Pisa II, 3 (1934)

(3) A. Khintchine: Déduction nouvelle d'une formule de M. Paul Lévy. Bulletin d. U. d'État Moscou. Sec. A Vol. 1 F1. (1937)

ソレデ Khintchine ノ証明ヲ茲デ採用シヨウトスルト、§2ノ定義ト定義1トガ同等デアルコトヲ先ヅ示サナケレバナラナイ。コレハ出来テ居ル[4]ケレドモ餘リ簡單デハナイ。ノミナラズ、Khintchine ノ方法ハ、純解析的トデモイフベキデアロウカ。確率論的ナ概念ヲ要シナイ。ソレハ今ノ場合必ズシモ歡迎スベキコトデハナイト思ハレル。依ッテ Khintchine ノ論文ヲソノマヽ紹介スルノモ面白クナイ。

ソレデ茲デハ、定理2ノ証明トシテ、ソノ必要ナコトハ確率変数ノ積分ノ考ヘヲ避ケナガラ Lévy ノ著[5]ノ方法ニ従ッテ、充分ナコトハ Khintchine ノ上述ノ論文ニ従ッテ述ベル。

補助定理1　確率法則 $\mathcal{L}$ ガ無限ニ分解可能デアルタメノ必充條件ハ、$\mathcal{L}$ ニ従フ確率変数 $\mathbb{X}$ ニ對シテ、$\varepsilon>0$, $\varepsilon'>0$ ヲバ如何ニ與フルトモ、次ノ様ナ確率変数 $\mathbb{X}_i$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ見出シ得ルコトデアル。

---

(4) A. Khintchine: Zur theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze. Recueil Math. T. 2(44): 1 (1937) [p. 81–90 マデノ部分ニアル] 定理2ヲ用フレバ定義2ト§2ノ定義トノ同等ヲ示スノハ容易デアル。

(5) Théorie de l'addition des variables aléatoires (1937) ノ §54 (pp. 180–186) ソノ証明カラ確率変数ノ積分ノ考ヘヲ除去スルコトハ容易ナ事デアル。

$$
(9)\quad \begin{cases} 1^\circ.\ \ X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n \text{ ハ相互ニ独立デ、} \\ \qquad\qquad\qquad X = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n \\ 2^\circ.\ \ Pr.\left[\,|X_k| \geqq \varepsilon\,\right] < \varepsilon' \quad (k=1,2,\cdots\cdots,n) \end{cases}
$$

証明: コレヲ示スニハ、次ノ補助定理2ヲ証明スレバヨイ。

<u>補助定理2.</u> X_n ノ確率法則ヲ $\mathcal{L}_n$ トスルト、次ノ(α)ト(β)トハ同等デアル:

(α) $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(\mathcal{L}_n) = 0$

(β) 任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シテ $\lim\limits_{n\to\infty} Pr.\left[\,|X_n| \geqq \varepsilon\,\right] = 0$

証明: $\mathcal{L}_n$ ノ散布度[6](函数)ヲ $l_n(\gamma)$ デ表ハスト(α)ハ「任意ノ $0<\gamma<1$ ニ対シテ $\lim\limits_{n\to\infty} l_n(\gamma)=0$」ト同等ナコトカラ、容易ニ証明シウル。〔証明終〕

<u>便宜上(9)ヲ満足スル $\{X_i\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ、X ノ $(\varepsilon,\varepsilon')$ ―分解ト略称シヨウ。</u>

<u>補助定理3.</u> 任意ノ自然数 n ニ対シテ $[f(t)]^{\frac{1}{n}}$ ガ或ル確率法則ノ特性函数[7]デアルナラバ、$f(t)$ ハ、§2ノ

---

(6) §1 デハ平均散布度ニツイテ述ベタガ、§3デハ専ラ散布度ヲ用キテ居ル。§1 デ定義シタ $\omega(\gamma)$ ハ詳シクイヘバ、「<u>確率 γ ニ対スル X ノ散布度</u>」ナル言葉ヲ用ヒルノデアル。X, Y ガ独立ナルトキ、各 γ ニツイテ $\omega_{X+Y}(\gamma)$ ハ $\omega_X(\gamma)$ 及ビ $\omega_Y(\gamma)$ ヨリ大デアル。コレヲ散布度増加ノ原理トイフ。

(7) コレカラ任意ノ $\alpha>0$ ニ対シテ、$f(t)^{\alpha}$ ガ特性函数ニナルコトハイフマデモナク明ラカデアル。

意味ニ於ケル無限ニ分解可能ナ確率法則ノ特性函数デアル。

証明：　$f(t)=\left[f(t)^{\frac{1}{n}}\right]^n$ デアルカラ、X ヲバ，相互ニ独立ナ且ツ各々ハ確率法則 $f(t)^{\frac{1}{n}}$ ニ従フ X_ν^n $(\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$ ノ和ニ分解出来ル：$X=X_1^n+X_2^n+\cdots+X_n^n$

明カニ、$f(t)^{\frac{1}{n}}$ ハ，$n\to\infty$ ノトキ t ノ任意ノ有限区間デ一様ニ、1 ニナル。コレカラ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ

$\lim_{n\to\infty}\ \mathrm{Max}_{1\leqq k\leqq n}\ \Pr.\left[|X_k^n|\geqq\varepsilon\right]=0$ が証明出来ル。依ッテ補助定理 1—2 ニ依ッテ証明スベキ結果ニ達スル。〔証明終〕

尚吾々ハ次ノ三ツノ補助定理ヲ必要トスル、最初ノ二ツハ，確率法則ノ無限行列

$$
(\mathrm{M})\quad\left\{\begin{array}{llll}
X_{1,1} & & & \\
X_{2,1} & X_{2,2} & & \\
\multicolumn{4}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
X_{n,1} & X_{n,2} & \cdots\cdots & X_{n,n} \\
\multicolumn{4}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}\right.
$$

ニ関スルモノデアル。但シ，コヽニ、各 n ニツイテ $X_{n,1}$, $X_{n,2}$, ……, $X_{n,n}$ ハ相互ニ独立デアルトスル。$S_n=X_{n,1}+X_{n,2}+\cdots\cdots+X_{n,n}$ トオク。

<u>補助定理4.</u>　(M) ニ於テ次ノ條件が満足サレテ居ルトスル：

$$
(\mathrm{P})\left\{\begin{array}{ll}
1^\circ & X_{n,k}\ \text{ハ}\ 1,0\ \text{ヲバ夫々確率}\ p_{n,k},\ 1-p_{n,k}\ \text{デトル.} \\[2ex]
2^\circ & \mathrm{Max}_{1\leqq k\leqq n}\ p_{n,k}=\alpha_n\to 0,\quad \sum_{k=1}^{n}p_{n,k}\to\eta \quad (n\to\infty\ \text{ノトキ})
\end{array}\right.
$$

然ルトキニハ，S_n ノ特性函数ハ，$n\to\infty$ ノトキ，$-\infty<t<\infty$ デ一様ニ，$\exp.\{\eta(e^{itu}-1)\}$（一般ノ Poisson ノ分布ノ特性函数）ヘ収斂スル。

<u>補助定理5.</u>（M）ニ於テ次ノ條件ガ満足サレテ居ルトスル：

$$(\mathrm{L})\begin{cases}1^\circ & |X_{n,k}|<\varepsilon_n\ (k=1,2,\cdots,n),\quad \varepsilon_n\downarrow 0\\ 2^\circ & E\{X_{n,k}\}=0\end{cases}$$

然ル時ニハ，$b_n^2=\sum_{k=1}^{n}D^2\{X_{n,k}\}$ トオケバ，S_n/b_n ノ特性函数ハ，$n\to\infty$ ノトキ，$-\infty<t<\infty$ デ Gauss ノ分布ノ特性函数 $\exp(-t^2/2)$ ニ一様分布ヲナス。

（Liapounoff）

コレラハ，何レモ確率論上ノ基本定理デアルカラ、茲ニ、コレラヲ證明シテモ天降リデハアルマイ。尚コレラノ補助定理ガ（7）ノ右辺ノ構成要素トシテノ Poisson ノ分布、Gauss ノ分布ノ意味ヲモ與ヘテ居ルコトニ注意シタイノデアル。

コレニ反シテ、次ノ Lévy Doeblin[8] ノ定理ハ相當 deep ナ事ヲ主張シテ居ル：

---

(8) Lévy-Doeblin: Sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à dispersion bornées inférieurement. C. R. Paris 202, 2027–2029 (1936)

定義2. 独立ナ確率変数ノ集合 $\{X_\alpha\}$ ニ於テ、各 X_α ノ散縮度ヲ $\omega_\alpha(\gamma)$ デ表ハストキ，

(D) スベテノ α ニ共通ニ，$\omega_\alpha(\gamma+0) \geqq 2l$ トナル様ナ $0<\gamma<1$, $l>0$ ガ存在スル。

トイフ條件ガ満足サレルナラバ，$\{X_\alpha\}$ ヲバ，下ニ有界ナ散縮度ヲ有スル独立ナ確率変数ノ集合デアルトイフ。

<u>補助定理6</u> $0<\gamma<1$, $0<\beta$ ナル如キ γ, β ヲ任意ニ與フルトキ次ノ如キ性質(P)ヲモツ $k>0$ 及ビNヲバ見出スコトガ出來ル。

(P): 條件(D)ガ満足サレル $\{X_\alpha\}$ カラ、部分列 $\{X_n\}$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) ヲ任意ニトルトキ，$n>N$ ナル限リ $\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu$ ノ β ニ関スル散縮度ハ $kl\sqrt{n}$ ヨリ小デナイ。

3.1. <u>定理2ノ條件ノ充分ナ事ノ証明</u>

(8)ナル附帯條件ヲ満足スルトキ(7)デ與ヘラレル $f(t)$ ハ

$$(7') \quad f(t)=\exp\left\{imt+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\right\}$$

ノ形ニ表ハシ得ル。但シ，茲ニ m ハ実数，$G(u)$ ハ $(-\infty,\infty)$ デ非減少且ツ有界ナ函数ニトレル。

今 ε ヲ任意ノ正数トスル。$\Delta_\varepsilon=G(\varepsilon)-G(-\varepsilon)$ トシ，且ツ

$$G_\varepsilon(u)=\begin{cases} G(u) & [u\leqq -\varepsilon] \\ G(-\varepsilon) & [-\varepsilon\leqq u\leqq\varepsilon] \\ G(u)-\Delta_\varepsilon & [u\geqq\varepsilon] \end{cases}$$

ト置ク。$G_\varepsilon(u)$ ハ u ノ函数トシテハ，有界且ツ非減少デアルカラ、適當ナ正數 λ_ε ト，$\Phi_\varepsilon(u)$ トヲ選ンデ

$$G_\varepsilon(u)=\lambda_\varepsilon\Phi_\varepsilon(u)$$

ト表ハシ，$\Phi_\varepsilon(u)$ ハソレカラ適當ナ定數ヲ引ケバ，分布函數ニナルヤウニ出來ル。次ニ $f_\varepsilon(t)$ ヲ導入スル：

$$f_\varepsilon(t)=\int_{|u|>\varepsilon}(e^{itu}-1)\,dG(u)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1)\,dG_\varepsilon(u)$$

$$=\lambda_\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1)\,d\Phi_\varepsilon(u)=\lambda_\varepsilon\left[\varphi_\varepsilon(t)-1\right]$$

但シ，$\varphi_\varepsilon(t)$ ハ $\Phi_\varepsilon(u)$ ノ特性函數ヲ表ハストスル。

吾々ハ，$f_\varepsilon(t)$ ガ、任意ノ $\varepsilon>0$ ト任意ノ有界且ツ非減少ナ $G(u)$ トニ對シテ、或ル特性函數ノ對數デアルコトヲ言ヒタイノデアルが、コレハ次ノ如クシテ示サレル：
$\frac{\lambda_\varepsilon}{n}\varphi_\varepsilon(t)+\left\{1-\frac{\lambda_\varepsilon}{n}\right\}$ ハ $n\geqq\lambda_\varepsilon$ ナルスベテノ n ニ對シテ特性函數デアルカラシテ、ソノ對數ヲトツテ n 倍シタ
$n\log\left\{\frac{\lambda_\varepsilon}{n}\varphi_\varepsilon(t)+\left(1-\frac{\lambda_\varepsilon}{n}\right)\right\}$ 即チ
$n\log\left\{1+\frac{\lambda_\varepsilon}{n}\left[\varphi_\varepsilon(t)-1\right]\right\}$ モ，或ル特性函數ノ對數デアル。

依ツテ $n\longrightarrow\infty$ ニ對スルソノ極限（ソレハ t ノ任意ノ有限區間デノ一様收斂シタ極限）$\lambda_\varepsilon\{\varphi_\varepsilon(t)-1\}=f_\varepsilon(t)$ モ亦ソウデナケレバナラヌ。

$f_\varepsilon(t)$ が或ル特性函數ノ對數デアルコトカラ

$$\int_{|u|>\varepsilon}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dG(u)$$

ガ入ッテヰルノデアル。蓋シ，コレト $f_\varepsilon(t)$ トハ タダ．imt（m ハ常数）デシカ異ラナイカラデアル。更ニ又 $dG(u)$ ヲバ $|u|>\varepsilon$ ニテ $(1+u^2)dG(u)/u^2$ デ置キカヘタモノハ，アル特性函数ノ對數デナケレバナラヌ。

次ニ $\varepsilon\to 0$ ナラシメル。ソノトキ，假定ニヨリ

$$(10)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|u|>\varepsilon}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)\right)$$

ノ存在ハ確カデアルガ，尚、上述ノ結果ニ依リコレハ，或ル特性函數ノ對數デナケレバナラヌ。然ルニ，コレト（7'）トノ相異ルノハ，高々 $imt-\lambda t^2$（$\lambda\geqq 0$）ノ形ノ項ニ於テデアル〔$G(u)$ ノ $u=0$ ニ於ケル飛躍ニヨツテ λ ガキマル〕。シカルニ，$\exp(imt-\lambda t^2)$（$\lambda\geqq 0$）ガ Gauss ノ分布（一般ノ）ノ特性函數デアルコトハヨク知ラレタコトデアルカラ、コレト（10）ノ指數函數トヲ乘ジタモノ、即チ（7'）ハ又特性函數デナケレバナラヌ。

次ニ $f(t)$ ガ無限ニ分解可能デアルコトハ，任意ノ自然數 n ニ對シテ $\log f(t)/n$ ガ同ジク（7''）ノ形式ニアラハサレルコトカラ、今シガタ得タ結果ニ依リ、$[f(t)]^{\frac{1}{n}}$ モ亦特性函數デアル。依ツテ補助定理3ヲ採用スレバ $f(t)$ ハ無限ニ分解可能デアル。〔證明終〕

§3.2. 定理2ノ條件ノ必要ナ事ノ證明.

今、正数 ε, ε' ヲバ，次ノ如ク選ンデアルトスル：
$\varepsilon^2>\varepsilon'>0$, $\varepsilon<1/20$.

又ヲバ，無限ニ分解可能ナ法則 $f(t)$ ニ従フ確率

変数トシ，$\{\mathfrak{X}_i\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ハ $\mathfrak{X}$ ノ $(\varepsilon^2,\varepsilon')$－分解ナリトスル。コレニ関シテ

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha_\nu(\varepsilon)\equiv Pr.\left[|\mathfrak{X}_\nu|>\varepsilon\right], \quad \alpha(\varepsilon)\equiv \underset{1\leqq\nu\leqq n}{Max}\,\alpha_\nu(\varepsilon) \\ \eta(\varepsilon)\equiv \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu(\varepsilon) \end{cases}$$

ト置ク．簡単ノタメニハ，夫々、α_ν, α, η トモ書ク．次ニ $\{\mathfrak{X}_i\}$ ヲバ更ニ分解スルタメニ、次ノ様ナ三ツノ確率変数ヲ導入スル。

(12)
1°. u'_ν ハ $|\mathfrak{X}_\nu|\leqq\varepsilon$ ナル假定ノモトニ於テ

$$u'_\nu=\mathfrak{X}_\nu$$

2° u''_ν ハ $|\mathfrak{X}_\nu|>\varepsilon$ ナル假定ノモトニ於テ

$$u''_\nu=\mathfrak{X}_\nu$$

3° λ_ν ハ 0 及ビ 1 ヲ、夫々確率 α_ν, $1-\alpha_\nu$ デトル確率変数.

コレヲ用ヰルト，$(\varepsilon^2,\varepsilon)$－分解ノ構成分子タル各 $\mathfrak{X}_\nu$ ヲバ次ノ如ク分解出来ル。

$$(13)\quad \begin{cases} 1^\circ \quad \mathfrak{X}_\nu=\mathfrak{X}'_\nu+\mathfrak{X}''_\nu \\ 2^\circ \quad \mathfrak{X}'_\nu=(1-\lambda_\nu)\,u'_\nu, \quad \mathfrak{X}''_\nu=\lambda_\nu u''_\nu. \end{cases}$$

斯ル $\mathfrak{X}'_\nu$, $\mathfrak{X}''_\nu$, u'_ν, u''_ν, λ_ν $(\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲバ $\mathfrak{X}$ ノ $(\varepsilon^2,\varepsilon')$－分解ニ依ッテ定マルト略称スル。

サテ定理２ノ條件ノ必要ナコトノ証明ハ次ノ三段カラ成ル：

<u>第一段</u>：上記條件ヲ満足シ且ツ充分小ナル正数 ε, ε' ガ任意ニ與ヘラレルトキ、$\mathfrak{X}$ ノ $(\varepsilon^2,\varepsilon')$－分解ニ依ッテ得

ラレル X''_ν, λ_ν, u'_ν, u''_ν ニ對シテ、次ノ條件ヲ滿足スルヤウナ、X ノミニ從屬シ，ε, ε' ニハ無関係ナ正数 C_1 ガ存在スル：

$$(14)\quad \Pr.\left[\left|X-\left\{\sum_{\nu=1}^{n} u'_\nu+\sum_{\nu=1}^{n} X''_\nu-E\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu u'_\nu\right\}\right\}\right| \geqq \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right] < C_1\,\varepsilon.$$

第二段： 次ノ様ナ函数 $n(u)$ ト正数列 $\{\varepsilon_k\}$, $\{\varepsilon'_k\}$ トガ存在スル。

$$\begin{cases} 1^\circ\text{、}\ n(u)\ \text{ハ}\ (8),\ 1^\circ\ \text{ノ性質ヲモツ.} \\ 2^\circ\ \ X\ \text{ノ}\ (\varepsilon_k^2,\ \varepsilon'_k)\text{—分割ニ依ッテ得ラレタ}\ X''_\nu \\ \quad (\nu=1,2,\cdots\cdots n)\ \text{ニ對シテ} \end{cases}$$

$$(15)\quad \sum_{\nu=1}^{n} X''_\nu-\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon_k}+\int_{\varepsilon_k}^{\infty}\right)\frac{u}{1+u^2}\,dn(u)$$

ノ從フ確率法則ノ特性函数 $g_k(t)$ ハ，$|t|$ ノ任意ノ有限區間デ一様ニ

$$(16)\quad \left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right)\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dn(u)$$

收斂スル。

第三段： 定理2ノ條件ノ必要ナコトノ證明ノ完了.

第一段ノ證明： $\sum_{\nu=1}^{n}$ ヲバ，更ニ次ノ如ク分解スル：

$$(17)\quad \begin{cases} 1^\circ\quad \eta(\varepsilon)\equiv\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu=\sum_{\nu}{}_1\alpha_\nu+\sum_{\nu}{}_2\alpha_\nu+\cdots \\ \qquad\qquad\cdots+\sum_{\nu}{}_{p_n}\alpha_\nu+\sum_{\nu}{}_{p_n+1}\alpha_\nu \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 2^\circ & 1-\varepsilon' \leqq \sum_\nu{}_s\, \alpha_\nu \leqq 1 \quad (s=1,2,\cdots\cdots,p_n) \\ 3^\circ & 1-\varepsilon' > \sum_\nu{}_{p_n+1}\, \alpha_\nu \end{array}\right.$$

第一段ハ I — VI カラ成ル。I — III ニ於テハ、上記ノ各部分和 $\sum_s$ ($s=1,2,\cdots\cdots,p_n$) ヲ調ベル。簡単ノタメ $\sum_\nu{}_s$ ヲバ $\sum_\nu{}'$ デ表ハシ、$\sum_\nu{}_s\alpha_\nu$ ハ ζ' デ表ハスコトニスル。

I. $\varepsilon, \varepsilon'$ ガ充分小ナル正数トスレバ、確率 $2/3$ ニ関スル、$\sum_\nu{}'\lambda_\nu u''_\nu$ ノ散縮度ハ ε ヨリ大デアル。

〔証〕: $\varepsilon, \varepsilon'$ ヲバ充分小サクトッテ置ケバ、$\sum_\nu{}'\lambda_\nu$ ナル確率変数ハ Poisson ノ分布ニ近イ分布ヲナス。(補助定理, 4) 従ッテ $1/e$ ニ近イ確率、従ッテ $1/3$ ヨリ大ナル確率ヲ以ッテ、$\sum_\nu{}'\lambda_\nu$ ハ 0 ナル値ヲトル。同様ニ、$\sum_\nu{}'\lambda_\nu$ ガ 1 ナル値ヲトル確率モ $1/3$ ヨリ大デアル。然ルニ $\sum_\nu{}'\lambda_\nu$ ガ 0 ナルトキニハ $\sum_\nu{}'\lambda_\nu u''_\nu$ ハ 0 デアリ、$\sum_\nu{}'\lambda_\nu$ ガ 1 ナルトキニハ $\sum_\nu{}'\lambda_\nu u''_\nu$ ハ ε ヨリ大デアル。因ッテ $\frac{2}{3}$ ニ関スル $\sum\lambda'_\nu u''_\nu$ ノ散縮度ハ ε ヨリ大デアル。{詳シク説明スレバ: 長サガ ε ヲ超ヘナイ如何ナル区間モ、$\sum_\nu{}'\lambda_\nu$ ニ對應スル $\sum_\nu{}'\lambda_\nu u''_\nu=0$ ノ起ル場合カ或ハ $\sum{}'\lambda_\nu=1$ ニ對應スル $\sum{}'\lambda_\nu u''_\nu>\varepsilon$ ノ起ル場合カ少クモ一方ヲ含マナイ。而シテ上ノ二ツノ場合ノ起ル確率ハ共ニ $1/3$ ヨリ大デアル。依ッテ長サガ ε ヲ超ヘナイ如何ナル区間モ確率 $2/3$ ヲ擔フコトハアリ得ナイ]

II. $\varepsilon, \varepsilon'$ガ充分小ナル正数ナラバ，確率 2/3 ＝関スル，$\sum_\nu{}'(u'_\nu+\lambda_\nu u''_\nu)$ ノ散縮度ハ ε ヨリ大デアル。

〔証〕: 蓋シ，u'_ν ハ λ_ν トモ u''_ν トモ独立，故ニ u'_ν ト $\lambda_\nu u''_\nu$ トハ独立デアル。独立ナ項ノ加法ニヨリ散縮度ハ増加スル一方デアルカラ（散縮度増加ノ原理，§1，及ビ §3 ノ註(6)）I カラ直チニ II ヲ得ル。

III. 確率 5/6 ＝関スル，$\sum_\nu{}'((1-\lambda_\nu)u'_\nu+\lambda_\nu u''_\nu)$ ノ散縮度ハ n ガ充分大ナル トキニハ，ε ヨリ大デアル。

〔證〕: $\sum'$ ＝関シテデナク $\sum$ ＝関シテノ標準偏差ノ評價:

$$D^2\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu u'_\nu\right\}=\sum_{\nu=1}^{n}D^2\{\lambda_\nu u'_\nu\}$$

$$\leqq\sum_{\nu=1}^{n}E\{\lambda_\nu^2 u'^2_\nu\}=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu E\{u'^2_\nu\}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\alpha_\nu}{1-\alpha_\nu}E\{X'^2_\nu\}<\frac{\eta}{1-\varepsilon'}(\varepsilon^4+\varepsilon^2\varepsilon')$$

$$<\frac{2\eta}{1-\varepsilon'}\varepsilon^4<3\eta\varepsilon^4.$$

〔茲デ $E\{X'_\nu\}<\varepsilon^4+\varepsilon^2\varepsilon'$ ハ，$|X'_\nu|\leqq\varepsilon^2$ ガ確率 $\alpha_\nu(\varepsilon^2)<\varepsilon'$ ノ場合ヲ除イテ成立チ、除カレタ場合ニ於テモ ε ヲコエナイコトカラ得ラレル，ソノ他ノ不等式ハ自明〕。

次ニ $\sum$ ノ部分和デアル $\sum'$ ＝関シテモ同様ナ評價ニ依リ

$$D^2\left\{\sum_\nu{}' \lambda_\nu u'_\nu\right\} < 3\eta'\varepsilon^4 \leqq \varepsilon^4$$

ヲ得ル．依ッテ Bienaymé-Tchebycheff ノ不等式ニ依リ、

$$Pr.\left[\left|\sum_\nu{}'\lambda_\nu u'_\nu - E\left\{\sum_\nu{}'\lambda_\nu u'_\nu\right\}\right| \geqq \frac{\varepsilon}{4}\right] < 48\varepsilon < \frac{1}{6}$$

但シ，茲ニ $\varepsilon < \frac{1}{20}$ トイフコトヲ用ヒタ．〔始メニカクノ如ク假定シテ置イタノハコノタメデアル。〕

依ッテ確率 5/6 ニ對スル，$\sum_\nu{}'\lambda_\nu u'_\nu$ ノ散縮度ハ $\frac{\varepsilon}{2}$ ヨリ大デアル。コレト II トカラ、求ムル結果ニ到達スル。

IV. 確率 9/10 ニ關スル X ノ散縮度ハ $k\varepsilon\sqrt{p_n}/2$ ヨリ大デアル。茲ニ k ハ ε' ニ無關係ナ定数ニトルコトが出來ル。

〔証〕：(17)，1° ニ對應スル X ノ分解：

$$X = \sum_{\nu,1} X_\nu + \sum_{\nu,2} X_\nu + \cdots\cdots + \sum_{\nu} {}_{p_n} X_\nu + \sum_\nu {}_{p_n+1} X_\nu$$

ニ於テ各 X_s $(s=1,2,\cdots\cdots,p_n)$ ノ散縮度 l_s ニ關シテハ，III ニ依ッテ

$$l_s\left(\frac{5}{6}\right) > \frac{\varepsilon}{2} \qquad (s=1,2,\cdots\cdots,p_n)$$

が知ラレテ居ル。依ッテ $\sum_{\nu,1} + \sum_{\nu,2} + \cdots\cdots + \sum_\nu {}_{p_n}$ ハ所謂「下ニ有界ナ散縮度ヲ有スル独立ナ確率変数ノ和」ヲナス，コレニ對シテ補助定理6（Lévy-Doeblin ノ

定理）ヲ利用スレバ，$\sum_\nu{}_1 + \sum_\nu{}_2 + \cdots\cdots + \sum_\nu p_n$ ニ関シテ，IV ノ主張が成立ツ．依ツテコノ和ニ更ニ独立ナ確率変数ノ項 $\sum p_n+1$ ヲ加ヘタ X ニツイテハ，散縮度増加ノ原理ニ依リ尚更ソウデナケレバナラヌ。

V. <u>充分小ナル凡ベテノ ε ニ就イテ．$\varepsilon^2\eta(\varepsilon)$ ハ，X ノミニ従属シテ定マル或ル定数 C ヲ超エナイ</u>：$\varepsilon\eta(\varepsilon) \leqq C.$

〔証〕：　確率 $9/10$ ニ関スル，X ノ散縮度ヲ C' トスル。勿論 $C' < \infty$．サテ IV ニヨリ $C' > k\varepsilon\sqrt{p_n}$ デアル．故ニ k ハ ε ニモ ε' ニモ無関係ニトレル．$\varepsilon\sqrt{p_n} < C'/k$ トナル。他方 $\eta(\varepsilon) < p_n + 1$ ニ注意スレバ求メル結果ニ到達出来ル。

VI. <u>第一段ノ証明ノ完了</u>：　III ト IV トニ依リ．

$D^2\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu u'_\nu\right\}$ ハ $3\eta\varepsilon^4$ ヲ、従ツテ V ニ依リ

$3C\varepsilon^2$ ヲ、超ヘナイ。$C_1 = 3C$ トオケバ，Bienaymé-Tchebycheff ノ定理ニ依リ

$$\Pr\left[\left|\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu u'_\nu - E\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu u'_\nu\right\}\right| \geqq \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right] < C_1\varepsilon$$

ヲ超ヘナイ．他方 X ハ (9)，(13) ニ依リ表ハサレルカラ、上ノ不等式ハ証明セントスル式ニ外ナラナイ。

<u>第二段ノ証明</u>：　ε' が充分小ナラバ，$(\varepsilon^2, \varepsilon')$ ー分割ニ依ツテ得ラレタ $\sum X''_\nu$ ニ對シテハ，次ノ事ガイヘル。

(i) 各項ハ夫々極メテ小ナル確率ノ場合ヲ除イテ0ニナル。

(ii) $\sum_{\nu=1}^{n} X''_\nu$ ノ平均値ハ必ズシモ0デナイ。

依ッテ ε' ガ充分小ニナレバ, $\sum_{\nu=1}^{n} X''_\nu$ ノ従フ特性函数ハ,

$$(18)\quad \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\left(e^{itu}-1\right)d\varphi_{\varepsilon,\varepsilon'}(u)$$

ナル形ノ函数ニ極メテ近クナル。〔詳シク云ヘバ, $T>0$, $\delta>0$ ヲ任意ニ与フルトモ, $\varepsilon'(\delta)$ ガ存在シテ $\varepsilon'<\varepsilon'(\delta)$ ナルスベテノ ε' ニ對シテ $|t|\leqq T$ ニテ $\sum_{\nu=1}^{n} X''_\nu$ ノ特性函数ト（ ）ト差ガ δ ヲ超ヘナイヤウナ $\varphi_{\varepsilon,\varepsilon'}$ ガ存在ス〕

然ルニ、他方カラ考ヘルト

$$(19)\quad \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)d\varphi_{\varepsilon,\varepsilon'}(u)=\eta_{\varepsilon'}(\varepsilon)<\frac{C}{\varepsilon^2}+1$$

デアル。茲ニ C ハ ε' ニモ ε ニモ無関係デアル。ソコデ $\varphi_{\varepsilon,\varepsilon'}(\pm\infty)=0$ トイフ條件ヲ附加スルト $\{\varphi_{\varepsilon,\varepsilon'}(u)\}$ ナル非減少ナ函数ノ集合ハ緊ッテ居ル。依ッテ、コノ函数集合カラ部分函数列 $\{\varphi_{\varepsilon_k,\varepsilon'_k}(u)\}$ ($k=1, 2, \cdots\cdots$) ヲトッテ、或ル $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ デ非減少ナ函数 $n(u)$ ヘ, $n(u)$ ノ凡ベテノ連続点デ収斂スル様ニ出来ル。(19) ニ依ッテ明カニ (8), 2° ノ性質ヲコノ $n(u)$

ハモタネバナラヌ。従ッテ，

$$(20)\quad \left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right)\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dn(u)$$

ハ意味ヲモツ、吾々ガ得タ結果ハ上記ノ $\{\varepsilon_k\}$, $\{\varepsilon'_k\}$ ヲトレバ X ノ $(\varepsilon^2_k,\ \varepsilon'_k)$ 一分解ニ依ッテ得ラレタ X''_ν $(\nu=1.2,\cdots\cdots,n)$ ニ對シテハ

$$(21)\quad \sum_{\nu=1}^{n}X''_\nu-\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon_k}+\int_{\varepsilon_k}^{\infty}\right)\frac{u}{1+u^2}\,dn(u)$$

ノ從フ確率法則ノ特性函數 $g_k(t)$ ハ $k\longrightarrow\infty$ ノトキ，$|t|$ ノ区間デ一樣ニ (20) ニ收斂スル。

<u>第三段ノ証明</u>： 第二段デ導入シタ X ノ $(\varepsilon^2_k,\ \varepsilon'_k)$ 一分解ニ對スル $\sum_{\nu=1}^{n}u'_\nu+\sum_{\nu=1}^{n}X''_\nu-E\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu u'_\nu\right\}$ ノ特性函數ヲ $f_k(t)$ デ表ハサウ。

$$(22)\quad \sum_{\nu=1}^{n}u'_\nu-E\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu u'_\nu\right\}+\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon_k}+\int_{\varepsilon_k}^{\infty}\right)\frac{u}{1+u^2}\,dn(u)$$

ノ特性函數ヲ $h_k(t)$ トスル。(22) ノ第二，三項ハ常數（k ニハ從屬スルガ）デアル。第一項ニ對シテ Liapounoff ヲ適用出来ルカラ．結局次ノヤウナ性質ヲモツタ実數列 $\{m_k\}$，正數列 $\{\lambda_k\}$ ノ存在ガ云ヘル： t ノ任意ノ有限區間デ一樣ニ

$$\lim_{k\to\infty}\left\{h_k(t)-\exp\left(im_k t-\lambda_k t^2\right)\right\}=0.$$

然ルニ第一段ト第二段トニヨリ t ノ任意ノ有限區間デ，$f_k(t)$，$g_k(t)$ ハソレゾレ一樣ニ $f(t)$，$g(t)$ ニ收斂

スル $f_k(t)=h_k(t)\,g_k(t)$ デアルカラ、$h_k(t)$ ハ $f(t)/g(t)$ ニ，t ノ任意ノ有限區間デ一様ニ收斂シナケレバナラヌ。依ツテ、m_k, λ_k ハ夫々 m（實數），λ（正數）ニ，$k\to\infty$ ノトキ，收斂セネバナラヌ。從ツテ $f_k(t)=h_k(t)\,g_k(t)$ ハ $k\to\infty$ ノトキ，$\exp(imt-\lambda^2t^2)\,g(t)$ ニ，t ノ任意ノ有限區間デ一様收斂スル，第一段ニ依リ。$f(t)=\exp(imt-\lambda^2t^2)\,g(t)$．依ツテ第二段ハ出來タ。

§3,1 — §3,2 ニ依リ定理2ノ証明ハ完結シタ。

§4. 無限ニ分解可能ナ確率法則ノ Árithmétique

定理3. 無限ニ分解可能ナ確率法則ノ特性函數ヲバ，(7) ナル形ニアラハス仕方ハ，m, λ ガ實數デ、$n(u)$ ガ實數値デ且ツ $n(\pm\infty)=0$ ナリトスレバ，只一通リニ定マル。

証明: 今假リニ、m, λ, $n(u)$, m', λ', $n'(u)$ ナル二通リノ書キ方ガアルトスル。(7) ノ右辺ガ意味ヲモツタメニハ，開區間 $(-\infty,0)$ 及ビ $(-\infty,0)$ デ、$n(u)$, $n'(u)$ ハ有界変分デナケレバナラヌ。

先ヅ、$n'(u)$, $n(u)$ ガ共ニ上ノ開區間デ非減少ナリトスル。然ルトキニハ $n(u)-n(u')$, $n'(u)-n'(u')$ ハ共ニ、高サガ $[u,u']$ ニ属スルヤウナ突然変化ノ平均値ヲ示サネバナラヌ。依ツテ $n(u)-n(u')=n'(u)-n'(u')$，$n(\pm\infty)=n'(\pm\infty)=0$ デアルカラ、$n(u)=n(u')$

トナル。コノ事カラ $m=m'$，$\lambda=\lambda'$ ヲ得ルコトハ明カデアル。

次ニ、$n(u)$，$n'(u)$ ガ開区間 $(-\infty, 0)$，$(0, \infty)$ デ単ニ有界変分トスレバ如何。コノトキニハ，$n(u)=n_1(u)-n_2(u)$，$\overline{n}(u)=\overline{n}_1(u)-\overline{n}_2(u)$ トナルヤウナ非減少ナ函数 n_1，n_2，$\overline{n}_1$，$\overline{n}_2$ ガアル、從ツテ

$$mit-\lambda\frac{t^2}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)d\left[n_1(u)+n'_2(u)\right]$$

$$=mit-\lambda'\frac{t^2}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(c^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)d\left[n'_1(u)+n_2(u)\right]$$

トナル，定理2ニヨリ、各辺ハ無限ニ分解可能ナ確率法則ノ特性函数ノ對数ヲ示シ、$n_1(u)+n'_2(u)$，$n'_1(u)+n_2(u)$ ハ開区間 $(-\infty, 0)$，$(0, \infty)$ デ非減少デアル。依ツテ、$n_1(u)+n'_2(u)=n'_1(u)+n_2(u)$ トナラネバナラヌ。即チ $n(u)=n'(u)$. コレカラ前ト同様ニ $m=m'$, $\lambda=\lambda'$ ヲ得ル。〔証終〕

<u>定理4.</u> $\mathcal{G}$ ニ属スル $\mathcal{L}=L_1^{m}L_2^{\lambda}\prod\mathcal{L}_u^{dn(u)}$ ガ、$\mathcal{G}$ ニ属スル $\mathcal{L}_1=L_1^{m_1}L_2^{\lambda_2}\prod\mathcal{L}_u^{dn_1(u)}$ ニ依ツテ $\mathcal{G}$ ニ於テ分解サレルタメノ必充條件ハ

$$m_2=m-m_1,\quad \lambda_2=\lambda-\lambda_1,$$

$$n_2(u)=n(u)-n_1(u)$$

ニ依ツテ定義サレタ m_2，λ_2，$n_2(u)$ ガ (8)〔§3〕ヲ満足スルコトデアル。而シテ、コノ條件ガ満足サレル

トキニハ，

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2, \quad \mathfrak{L}_2 = L_1^{m_2} L_2^{\lambda_2} \prod \mathfrak{L}_u^{d n_2(u)}$$

トナリ、従ッテ$\mathfrak{L}_2$ハ唯一通リニキマル。

証明： 定理2ト3トカラ明カデアル。