735. 確率法則ノ分解問題, III

北川　敏男（阪大）

確率法則ノ分解問題ニ関スル基本的ナ結果トシテ、*Khintchine* ノ基本定理ヲ掲ゲタ（§2）。ソノ証明ニ先チ、前回ハ，無限ニ分解可能ナ確率法則ノ一般形式ヲ述べ（§3），ソレカラ無限ニ分解可能ナ確率法則全部ノ集合 $\mathfrak{O}_f$ ニ於ケル *Arithmétique* ヲ述べタ。今回ハ，無限ニ分解可能ナ確率法則トイハバ對蹠的ナ関係ニアル分解不可能ナ確率法則ニツイテ調べテミヨウ。

§5. 分解不可能ナ確率法則[1]（或ハ素ナル確率法則）

確率法則ガ分解不可能デアルタメノ必要條件ハ何カ、コレニツイテハ未ダ殆ンド分ッテ居ラナイヤウデアル。又充分條件トシテモ、極メテ初等的ナ事ガ断片的ニ得ラレテ居ルヤウニ過ギナイヤウデアル。將来ノ研究ニ俟タネバナラヌコトガ極メテ多イ。茲デハ，*Lévy* ノ論文ニ從ヒ断片的ナ結果ヲ羅列スルニ止メヨウ。

便宜上次ノ言葉ヲ用ヒル：或ル確率変数 $\mathfrak{X}$ ニ関シテ実數

---

(1) P. Lévy: L'arithmétique des lois de probabilité. Journ. Math. Pures et appliquées (1938) 及ビ A. Khintchine: Contribution à l'arithmétique des lois de distribution Bulletin de U. E. Moskou (1937) ニ由ル.

x が可能ナ値（*valeur possible*）トイフノハ，任意ノ正数 ε ニ対シテ $|\mathrm{X} - x| < \varepsilon$ トナル確率ガ正数デアルコトヲ意味スル。

次ニ $\Pr.[\mathrm{X} = x] > 0$ ナラバ，X ニ対シテ x ハ正ナル確率ヲモツトイフ。U, V ガ相互ニ独立ナ確率変数デアルナラバ，U + V ノ可能ナ値ノ全体ハ，U ノ任意ノ可能ナ値ト V ノ任意ノ可能ナ値トノ和ヲ、アラユル組合セニ就イテツクッタモノノ全体ニ外ナラナイ（尤モ，異ッタ組合セニ対応スル U + V ノ値ガ偶々、相等シイコトモ起リ得ヤウ）同様ナコトガ正ナル確率ヲモツ値ノ集合ニ就イテモ成立スル。

又 U, V ニ対シテ正ナル確率ヲモツ値ガ夫々、丁度 p 個，丁度 q 個アルトスルト，U, V ガ相互ニ独立ナトキ，U + V ニ対シテ正ナル確率ヲモツ値ハ少クモ $p+q-1$ 個アリ、多クトモ pq 個ヲ超ヘナイ。（証：假リニ $p \geqq q$ トショウ。$u_1 < u_2 < \cdots\cdots < u_p$，$v_1 < v_2 < \cdots\cdots < v_q$ ヲバ，夫々 U, V ニ対シテ正ナル確率ヲモツ値トスル。u_1+v_1，u_1+v_2，u_2+v_2，u_2+v_3，u_3+v_3，u_3+v_4，$\cdots\cdots$，u_q+v_q ヲツクリ、更ニ $u_{q+1}+v_q$，$u_{q+2}+v_q$，$\cdots\cdots$，u_p+v_q ヲツクル。コレラ $p+q-1$ 個ハ，確カニ相異ッテ居ル（増加数列ヲナス）。"多クトモ" ノ分ハ自明）

以上ノヤウナ極メテ簡単幼稚ナコトカラ、次ノ事ガ導カレル。

(I) <u>分解不可能ナタメノ充分條件:</u>

定理5. 確率変数 X ノ可能ナ値ノ差ガ悉ク相異ルトキ，即チ X ノ任意ノ四ツノ可能ナ値 x_1, x_2, x_3, x_4 ニツイテ、$x_2-x_1=x_4-x_3$ ガ成立ツノハ，$x_1=x_3$ 且ツ $x_4=x_2$ ナル場合ニ限ル時，X ノ従フ確率法則ハ分解不可能デアル。

証明：今假リニ、X ガ，共ニ単位法則（§1）デナイ（従ツテ可能ナ値ガ少クモ二ツ存在スル），相互ニ独立ナ U, V ノ和デ分解サレタトスル。U, V ノ可能ナ値 u_1, u_2; v_1, v_2 ニ對シテ $x_1=u_1+v_1$, $x_2=u_2+v_1$, $x_3=u_2+v_1$, $x_4=u_2+v_2$ トオケバ假定ニ矛盾スル〔証終〕。

例：X ノトル値ハ $\{x_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ デ $x_p-x_q=x_{p'}-x_{q'}$ トナルノハ $p=p'$, $q=q'$ ノトキニ限ルトスレバ，明カニ定理2ノ假定ヲ満足スル。例ヘバ $x_n=\log p_n$〔p_n ハ n 番目ノ素数〕

(II) 素因子（*facteurs indécomposables*）ノ数：分解不可能ナ確率法則ニ関聯シテ次ノコトガ問題ニナラウ：即チ與ヘラレタ確率法則ガ分解不可能ナ確率法則ノ積ニ分解出来ルトキ、ソノ分解不可能ナ確率法則即チ素ナル確率法則ノ個数ノ最大値ヲ求メルコトデアル。コレニ関シテ次ノ様ナコトガ知ラレテ居ル．

X ニ對スル可能ナ値ガ悉ク $\log N$ ノ形，（N ハ高々 p 個ノ素数ノ積）デアルナラバ，X ノ従フ確率法則ヲ確率法則ノ積ニ分解スルトキ，ソノ因子数ハ高々 p デアル。又 X ニ

對スル可能ナ値が悉ク $\log \frac{N}{N'}$ ノ形（N, N′ ハ共ニ、高々 p 個ノ素數ノ積）デアルナラバ、X ノ從フ確率法則ヲ確率法則ノ積ニ分解スルトキ、ソノ因子數ハ高々 $2p$ デアル。（Lévy）證明ハ定理 5 ノソレニ準ズレバ宜シイ。

（III）<u>本質的ニ異ナル分解</u>：或ル確率法則ノ二ツノ分解 $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ ニ於テ、$\mathcal{D}$ ノ各因子（*facteurs*）ノ夫々ニ適當ナ單位法則ヲ掛ケルコトニ依リ、$\mathcal{D}'$ ヲ得ルトキ（但シ、ソノ際因子ノ順序トイフコトハ考慮ニ入レナイデヨイコトハ勿論デアル）、$\mathcal{D}$ ハ $\mathcal{D}'$ ト單ニ外見上異ナル分解デアル。或ハ本質的ニ同ジ分解デアルトイフ。（コノ概念が同値ノ三律ヲ満足シテ居ルコトハ明ラカデアル）。次ニ、二ツノ分解が<u>本質的ニ異ナル</u>（*essentiellement différentes*）分解デアルトイフノハ、$\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ が共ニ或ル分解 $\mathcal{D}''$ カラ、夫々何カノ方法デ適當ニククリ合ス事（*groupements*）ニ依ッテ、單ニ外見上異ナル分解ニモチ來ラシ得ルトイフヤウナ $\mathcal{D}''$ ノ存在シナイコトヲ意味スルノデアル。確率法則ノ分解問題ニ於テハ、異ナル分解トイヘバ、ソレハ本質的ニ異ナル分解ヲ意味スル。單ニ外見上異ナルモノヲ区別スルノハ無意義デアル。

映ヘラレタ確率法則ニ對シテ、本質的ニ異ナル分解が幾通リアルカ、コレが又重要ナ問題トナルデアロウ。コレニ關シテモ未ダ殆ド分ッテ居ラナイ様デアル。

$0, 1, 2, \text{-----}, p-1$ ヲ夫々確率 $1/p$ デトル確率変

数 $\mathbb{X}_p$ ノ確率法則(特性函数)ヲ $f_p(u)$ $[u=e^{it}]$ デ表ハサウ：即チ

$$L_p: \quad f_p(u)=\frac{1}{p}\left(1+u+\cdots\cdots+u^{p-1}\right)=\frac{1-u^p}{p(1-u)}$$

然ルニ、$f_{pq}(u)=f_p(u)\,f_q(u^p)=f_q(u)\,f_p(u^q)$ デアルカラ、

$$\mathbb{X}_{pq}\sim\mathbb{X}_p+p\,\mathbb{X}'_q\sim\mathbb{X}_q+q\,\mathbb{X}'_p$$

トナル。茲ニ $\mathbb{X}_p$ ト $\mathbb{X}'_q$ トハ独立，$\mathbb{X}_q$ ト $\mathbb{X}'_p$ トハ独立デアル。[例ヘバ $p=2$, $q=3$ トスレバ $(0 \text{ or } 1)+(0 \text{ or } 2 \text{ or } 4)\sim(0 \text{ or } 1 \text{ or } 2)+(0 \text{ or } 3)$ トナル]。$p=2$, $q=3$ ノ場合，本質的ニ異ナル分解が得ラレル。

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots\cdots p_k^{\alpha_k}\,(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_k=h;\ p_1, p_2, \cdots\cdots$$

$\cdots\cdots, p_n$ ---相異ナル素数）ナルトキ L_n ハ，丁度 $h!/(\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\cdots\alpha_k!)$ 個ノ本質的ニ相異ナル分解ヲモツ。(証明ハ容易デアル)

以上、極メテ容易ニ看ラレル事柄ヲ述ベルニ止メタ。本節ノ(I), (II), (III)ノ夫々ニ於テモツト進ンダ結果モ得ラレテ居ルが、多クハ証明が述ベテナイカラ、ソレヲコヽニ報告スルコトハ差控ヘヤウ。

§6. [捕記] 確率法則ノ *arithmétique* ノ複雑サヲ示ス二三ノ面白イ例ヲ挙ゲヨウ：

$\boxed{\text{例 1}}$ $\underline{\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2=\mathcal{L}'_1\mathcal{L}'_2}$ トナリ、而モ $\mathcal{L}_1$ が

$\mathcal{L}_1'$ ニ依ッテモ或ハ $\mathcal{L}_2'$ ニ依ッテモ分解サレナイ例（Lévy）：今 X ハ〔0, 1〕デ一様分布ヲナス確率変数トシ、$2X_1$, $2X_2$, $3X_1'$, $3X_2'$ ハ夫々 $2X$ ノ整数部，$2X$ ノ分数部，$3X$ ノ整数部，$3X$ ノ分数部ヲ表ハス確率変数トシ，X_1, X_2, X_1', X_2' ノ確率法則ヲ夫々、$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1', \mathcal{L}_2'$ トスレバ，X ト X_2，X' ト X_2' ハ夫々独立デ $X = X_1 + X_2 = X_1' + X_2'$；依ッテ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1'\mathcal{L}_2'$.

然ルニ $\mathcal{L}_1$ ハ $\mathcal{L}_1'$ ニ依ッテ分解出来ナイ． 今假リニ分解出来タトスルト $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1'\mathcal{L}_1''$（$\mathcal{L}_1''$ ハ単位法則デナイ）トナル。$\mathcal{L}_1'$ ニ従フ X_1' ノトル値ハ 0, 1/3, 2/3 ノ三ツ、$\mathcal{L}_1''$ ニ従フモノハ，少クモ二ツノ相異ナル可能値ヲモツ。依ッテ X_1 ハ少クモ三ツノ相異ナル可能ナ値ヲモタネバナラヌ．コレハ事実ニ反スル。次ニ $\mathcal{L}_1$ ハ $\mathcal{L}_2''$ ニ依ッテ分解出来ナイ．蓋シ、X_2' ノトル値ハ長サ $1/3 < \frac{1}{2}$ ノ区間ニ分配サレテ居レカラデアル。

$\boxed{\text{例2}}$ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$，$\mathcal{L}_1$ ガ定マッテ $\mathcal{L}_2$ ガ唯一ツニハ定マラヌ例（Lévy） $f_1(t)$, $f_2(t)$ ハ共ニ、$|t| \leqq 1$ ニ於テハ $1-|t|$ ニ等シク、$|t|>1$ ノトキニハ，$f_1(t)$ ハ常ニ 0 デアリ、コレニ反シ $f_2(t)$ ハ週期 2 ノ週期函数デアルトスル。簡単ナ計算ノ結果

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\cos tx\,dx$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi t$$

デアルコトガ分カル。コレハ，$f_1(t)$, $f_2(t)$ ハ共ニ特性函数デアルコトヲ示ス。然ルニ、$f(t)\equiv f_1(t)f_2(t)=[f_1(t)]^2$，即チ $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_1$.

$\boxed{\text{例 3}}$ <u>分解不可能ナ確率法則 $\mathcal{L}'$ ニシテ、シカモ二ツノ無限ニ分解可能ナ確率法則 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}''$ ノ商トシテ表ハサレルモノ</u> (Lévy)

$(2+e^{it})/3$ ヲ特性函数ニ有スル確率法則ヲ $\mathcal{L}'$ トスル。$\mathcal{L}'$ ハ明ラカニ分解不可能〔$\mathcal{L}'$ ニ従フ確率変数ノトル値ハ 0, 1 ノ只二ツダカラ〕；一方 $(2+e^{it})/3$ ハ t ノ函数トシテハ 0 ニナラヌカラ、$\log\{(2+e^{it})/3\}$ ハ $t=0$ デ 0 ニナル分枝ヲトレバ一意ニ定マリ、ソノ虚数部ハ $-i\pi/6$ ト $i\pi/6$ トノ間ニアル。コレヲ Fourier 級数ニ展開スル：

$$\log\left(\frac{2+e^{it}}{3}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(e^{int}-1)$$

$a_n>0$ ナラバ，$a'_n=a_n$，$a_n\leqq 0$ ナラバ，$a'_n=0$，$a''_n=a'_n-a_n$ トスレバ $a'_n\geqq 0$，$a''_n\geqq 0$ デ

$$\log\left(\frac{2+e^{it}}{3}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}a'_n(e^{int}-1)-\sum_{-\infty}^{\infty}a''_n(e^{int}-1)$$

右辺ヲ $\psi_1(t)-\psi_2(t)$ デ表ハスト、§3 ニ依リ、$\psi_1(t)$，$\psi_2(t)$ ハ共ニ無限ニ分解可能ナ確率法則ノ對数デアル事ガワカル。

$\boxed{\text{例 4}}$ <u>無限ニ分解可能デ、シカモ二ツノ素ナル確率法則ノ積トシテ表ハサレル例</u> (Khintchine)

$$\frac{5+4\cos t}{9}=\frac{2+e^{it}}{3}\cdot\frac{2+e^{-it}}{3}$$ デアルカラ

$\frac{5+4\cos t}{9}$ ハ二ツノ素ナル、(=分解不可能ナ)確率法則(特性函数)ノ積デアル。<u>例3</u>ト同様ニ、$\log\left\{\frac{5+4\cos t}{9}\right\}$ ヲバ考ヘ, コレヲバ, $\psi(t)$ トオキ $\psi(t)$ ヲバ Fourier 級数ニ展開シテ. コレヲ. non-negative ナ係数ヲモツ三角級数ノ和ニ分チウルコトヲ示セバヨイ。