736. Mean ergodic theorem ノ應用

吉田　耕作（阪大）

談話724ニ於テ mean ergodic theorem（談話720）ノ應用例トシテ Markov-Doob ノ定理ヲヨリ精密ニシタ結果ヲ得タ。角谷君ハ本号談話ニ於テ之ヲ尚一般ニセラレタ。之レ等ハ全テ Banach 空間 $\mathfrak{X}$ ニ於ケル線型 operator T ノ反復ノ議論デアル。後カラ述ベルヤウニ固有値方程式 $T\cdot x = x$ ノ解ノ multiplicity ト之ノ共軛方程式 $\bar{T}\cdot X = X$ ノ解ノ multiplicity トノ関係ヲ知ル必要ガ生ジタ。S. Mazur ノ論文（Über die Nullstellen linearer Operationen, Stud. Math. II (1930)）ヲ見付ケタケレドモ，此ノ

マヽデハ役ニ立タナイ。m. e. t. ヲ應用スルト此Mazur ノ定理ガ拡張シタ形デ証明サレ且我々ノ使ヒタイ目的ニ叶フコトガ分リマシタ。

§I. 共軛 operator ノ説明

$\mathfrak{X}$ ヲ Banach 空間トシ，$\overline{\mathfrak{X}}$ ヲ $\mathfrak{X}$ デ定義サレタ linear functional $f(x)$ $(x \in \mathfrak{X})$ 全体ノ作レ線状空間トスル。$\overline{\mathfrak{X}}$ デノ norm ヲ

$$\|f\| = \underset{\|x\| \le 1}{l.u.b.} |f(x)|$$

ト定義スレバ $\overline{\mathfrak{X}}$ ハ又 Banach 空間ヲ作ル。之ヲ $\mathfrak{X}$ ノ<u>共軛空間</u>ト呼ブ。

$\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1$ ヲ Banach 空間トシ之レ等ノ共軛空間ヲ夫々 $\overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{X}}_1$ トスル。$\mathfrak{X}$ ヲ $\mathfrak{X}_1$ 内ニ寫ス線型 operator

$$x_1 = T \cdot x \qquad (x \in \mathfrak{X},\ x_1 \in \mathfrak{X}_1)$$

ニ對シ，次ノ如クシテ $\overline{\mathfrak{X}}_1$ ヲ $\overline{\mathfrak{X}}$ 内ニウツス線型 operator $\overline{T}$ ガ定義サレル：$\overline{T}$ ハ $\overline{\mathfrak{X}}_1$ ノ点 $f_1(x_1)$（$\mathfrak{X}_1$ ノ線型 functional，$x_1 \in \mathfrak{X}_1$）ニ対シ $\overline{\mathfrak{X}}$ ノ点 $f(x)$（$\mathfrak{X}$ ノ線型 functional，$x \in \mathfrak{X}$）$= f_1(T \cdot x)$ ヲ對應サセルモノデアル。

$$\overline{T} \cdot f_1 = f.$$

此ノ $\overline{T}$ ヲ T ノ<u>共軛 operator</u> ト呼ブ。<u>共軛空間</u>，<u>共軛 operator</u> ナル概念ハ Banach ヲ筆頭トスル Poland school ノ線型 operation ノ理論ニ於テ基本的ナ

役割ヲツトメル。次ノ例ニヨツテソノ意味ノ一端ガワカルコトト思フ。

$0 \leq t \leq 1$ ニ於テ積分可能ナ函数 $x(t)$ ノ作レ Banach 空間 (L)[1] ノ共軛空間ハ (M)（$0 \leqq t \leq 1$ デ有界可測ナ函数 $Y(t)$ ノ作ル Banach 空間[2]）デアル。即チ (L) ノ任意ノ線型 functional $f(x)$ ハ

$$\int_0^1 Y(t)\,x(t)\,dt\ , \qquad Y \in (M)$$

ノ形ニ表ハサレル。[3]

$0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq s \leq 1$ デ可測ナ $K(s,t)$ ガ，(L) ニ属スル任意ノ x 及ビ (M) ニ属スル任意ノ Y ニ對シ

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \left|K(s,t)\,x(t)\,Y(s)\right| ds\,dt < \infty$$

ヲ満足スルナラバ，

$$y(s) = y = T\cdot x = \int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt$$

ハ (L) ヲ (L) 内ニ寫ス線形 operation T ヲ定義スル。T ノ共軛 operator $\overline{T}$ ハ上述カラ (M) ヲ (M) 内ニ寫ス線型 operator トシテ表現サレル筈デアル。實際 Banach ノ

---

(1) (L) デノ絶對値ハ $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\,dt.$

(2) (M) デノ絶對値ハ $\|Y\| = \underset{0 \leq t \leq 1}{\mathrm{Max}} |Y(t)|.$

(3) S. Banach: Theorie des Operations linéaires, p. 65.

書物 (loc. cit. p. 105) ニ

$$X(t)=X=\bar{T}\cdot Y=\int_0^1 K(s,t)\,Y(s)\,ds$$

ト表現サレルコトガ示サレテヰル。

ヨッテ共軛 operation ト云フノハ Fredoholm 積分方程式論ニ於ケル transposed 積分 operator ノ概念ヲ抽象化シタモノデアルコトガ明ニナッタコトト思フ。

§2. S. Mazur ノ定理ノ擴張

Banach 空間 $\mathfrak{L}$ ノ $\mathfrak{L}$ 内ヘノ線型 operator T が, i) $\|T^n\| \leq$ 常數 C $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ii) 任意ノ x ニ對シ点列 $\{x_n\}=\left\{\frac{T+\cdots+T^n}{n}\cdot x\right\}$ が weakly compact in $\mathfrak{L}$ デアルヲ満足スルトスルト mean ergodic theorem が成立ツ (談話 724 並ニ角谷氏談話 731 參照[(1)])。即チ

任意ノ $x \in \mathfrak{L}$ ニ對シ

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T+T^2+\cdots+T^n}{n}\,x = T_1\cdot x & (\underline{\text{强收斂}}) \\ T_1^2 = T_1,\quad TT_1 = T_1T = T_1 \end{cases}$$

ノ成立スル如キ線型 operator T_1 が存在スル。

---

(1) 角谷氏ハ ii) ノ成立スル充分條件トシテ weakly completely continuous operator V が存在シテ $\|T-V\|<1$ ナルコトヲ得ラレタ。

T_1 ハ $\mathfrak{L}$ ヲ T ノ固有値 1 ニ属スル固有空間ヘ写ス projection operator デアル。（談話 724 参照）

$E, \bar{E}$ ヲ夫々 $\mathfrak{L}, \bar{\mathfrak{L}}$ ノ単位 operator トスル。

> **定理** $\mathfrak{L}$ ヲ $\mathfrak{L}$ 内ニ写ス線型 operator $(E-T)$, 之ノ共軛 operator $(\bar{E}-\bar{T})$（$\bar{\mathfrak{L}}$ ヲ $\bar{\mathfrak{L}}$ 内ニ写スモノ）ヲ考ヘル。
>
> $$(E-T)x=0, \quad (\bar{E}-\bar{T})X=0 \quad (x\in\mathfrak{L},\ X\in\bar{\mathfrak{L}})$$
>
> ノ一次独立ナ解ノ数ハ一致スル。

注意 Mazur (loc. cit.) ハ $\|T\|=1$ 且ツ $\mathfrak{L}$ ガ locally weakly compact ナル場合ニ上定理ノ成立スルコトヲ示シタ。コノトキハ T ガ條件 i), ii) ヲ満足スルコトハ明カダカラ，上定理ノ方ガズット一般デアル。Mazur ノ論法ハ巧ミデハアルガ，之ノ様ニ一般ニシテモ e. t. カラ簡單ニ得ラレルコトハ面白イト思フ。

証明：<u>第一段</u>。 $(E-T)x=0$ ノ一次独立ナ解ヲ $x_1, x_2, \text{-----}, x_p$ トスル。$x_1, \text{-----}, x_p$ ノ張ル線状空間 $\mathfrak{L}_1$ ガ丁度 $T_1\cdot\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_1$ デアル。$\mathfrak{L}_1$ デ定義サレタ任意ノ linear functional $X(x)$ $(x\in\mathfrak{L}_1)$ ハ $X'(x)=X(T_1\cdot x)$ $(x\in\mathfrak{L})$ ニヨッテ $\mathfrak{L}$ デ定義サレタ linear functional ヲ定義スル。

$$X'(x)-\bar{T}\cdot X'(x)=X(T_1\cdot x)-X(T_1T\cdot x)$$
$$=X(T_1x)-X(T_1x)=0 \quad (x\in\mathfrak{L})$$

ダカラ，コノ X' ハ $(\bar{E}-\bar{T})X'=0$ ヲ満足スル。

即チ $(\overline{E}-\overline{T})X=0$ ノ一次独立ナ解ノ個数ハ $\mathfrak{L}_1$ ノ次元数 p ヨリ少クナイ.

<u>第二段</u> 逆ニ $X\in\overline{\mathfrak{L}}$ ガ $(\overline{E}-\overline{T})X=0$ ヲ満足スルトスレバ, $X(x)-X(T\cdot x)=0$ $(x\in\mathfrak{L})$. ヨッテ

$$X(x)=X\left(\frac{T+T^2+\cdots+T^n}{n}\cdot x\right) \quad \text{for } n=1,2,\ldots.$$

従ッテ $X(x)=X(T_1\cdot x)$。即チ X ハ実ハ $\mathfrak{L}_1$ ノ上デ定義サレタ *linear functional* デアル。故ニ

$(\overline{E}-\overline{T})X=0$ ノ一次独立ナ解ノ数ハ $\mathfrak{L}_1$ ノ次元数ヲ越エナイ。 <u>以上</u>.

§3. $\boxed{\text{定理}}$ ノ應用

談話724ニ於テ, $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ デ可測且ツ $p(x,y)\geqq 0$, $\int_0^1 p(x,y)\,dy\equiv 1$ ヲ満足スル $p(x,y)$ ガ

$$(\times)\begin{cases} \mathcal{E}_i\geqq\mathcal{E}_{i+1},\ \lim\ \mathrm{mes}\,(\mathcal{E}_i)=0 \text{ ナル如キ任意ノ} \\ \text{可測集合列 } \{\mathcal{E}_i\} \text{ ニ對シ, } x \text{ ニ関シ一様ニ} \\ \lim\limits_{i\to\infty}\int_{\mathcal{E}_i} p(x,y)\,dy=0 \end{cases}$$

ヲ満ストスレバ, (L) ノ (L) ヘノ線状 *operator* T:

$$T\cdot f(x)=\int_0^1 \lambda\, f(x)\, p(x,y)\,dx$$

（λ 複素数 $|\lambda|=1$）

ハ m. e. t. ノ條件 i), ii) ヲ満足スルコトヲ示シタ。 故ニ

$\boxed{\text{定理}}$ カラ

$$(*)\quad f(y)=\int_0^1 \lambda f(x)\, p(x,y)\,dx \qquad (f(y)\in(L))$$

$$(**)\quad g(x)=\int_0^1 \lambda g(y)\, p(x,y)\,dy \qquad (g(x)\in(M))$$

ノ一次独立ナ解ノ数ハ一致スル。

談話 724. p. 438 ニヨレバ $(**)$ ノ解 $g(x)$ ノ存在スル如キ λ ハ $\lambda^n=1$ (n 整数) ヲ満足スル。故ニ

<u>定理</u>　固有値方程式

$$f(y)=\lambda\int_0^1 f(x)p(x,y)\,dx \qquad (|\lambda|=1)$$

ガ解ヲ有スルナラバ λ ハ $\lambda^n=1$ (n 整数) ヲ満足スル。

系.　然モ斯ル λ ハ高々<u>有限個</u>シカナイ。

証.　$\lambda^n=1$ ナル如キ最小数 n ガ有界ナコトヲ云ヘバヨイ。ソレハ, $\lambda^n=1$ ノ証明ノ仕方 (談話 676, p. 250) カラ直チニ分ル。

$\boxed{\text{注意}}$　Doob ノ條件 (X) ノ代リニ Doeblin ノ條件 (本号角谷氏談話) シカ満足サレテヰラナイ場合ニモ, m.e.t. ガ成立スルコトカラ本§ノ議論ガソノママアテハマルコトハ云フ迄モナイ。