738. Banach空間ニ於ケルlinear operationノiteration ニ就イテ VI

角谷 靜夫（阪大）

§4.

§4ニ於テハ §3ニテ得ラレタ結果ヲ Doeblinノ場合ニ應用スル。（Doeblinノ論文ニツイテハ前号及ビ本号ノ紹介記事ヲ參照サレタイ）。コヽデ考ヘルノハ特ニ Ω ガ直線上ノ interval $0 \leqq x \leqq 1$ デ、$m(E)$ ガソコデノ Lebesgue measure デアルトキデアル。

Doeblinノ論文紹介 II, §4ノ初メニ述べタ如ク、相當一般ナ場合モコレニ reduce スルコトハ出來ルガ、Ω 及ビ $m(E)$ ニ關シテ何等條件ノナイ場合ハコノ場合ニ reduce 出來ナイノデアル。シカシ Doeblin 自身モ final setノ中デノ点ノ運動ヲ論ズル場合ハコレヲ假定シテヰル。

サテ、假定ニヨリ、$P(x, E)$ ハ $0 \leqq x \leqq 1$ ナル x 及ビ、$0 \leqq x \leqq 1$ ノ部分 Borel集合 E ニ對シテ定義サレタ $0 \leqq P(x, E) \leqq 1$ ナル函數デアル。コレハ x ヲ fix スレバ E ニ關シテ totally additive ナ集合函數デアリ、E ヲ fix スレバ $0 \leqq x \leqq 1$ ニ於ケル x ノ measurable function デアル。

且ツ任意ノ x ニ對シテ $P(x, \Omega) = 1$ デアル。

今 Ω $(0 \leqq x \leqq 1)$ ノ部分 Borel 集合ガ定義サレ

タ totally additive ナ集合函數（必ズシモ non-negative ナラズ）ノ全体 $\mathfrak{M}$ ヲ考ヘレバ $\mathfrak{M}$ ハ linear space デ、任意ノ $\varphi \in \mathfrak{M}$ ニ對シテ

$$\|\varphi\| = \underset{E \in \mathfrak{L}}{l.u.b}\ \varphi(E) - \underset{E \in \mathfrak{L}}{g.l.b.}\ \varphi(E)$$

ニヨッテ φ ノ norm $\|\varphi\|$ ヲ定義スレバ $\mathfrak{M}$ ハコノ norm ニヨッテ Banach space トナル。[1]

次ニ、任意ノ $\varphi \in \mathfrak{M}$ ニ對シテ $\psi(E)$ ヲ

$$\psi(E) = \int_0^1 \varphi(dl_x) P(x, E)$$

ニヨッテ定義スレバ ψ モ亦 $\in \mathfrak{M}$ トナリ、$\varphi \to \psi \equiv T\varphi$ ハ $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ中ヘ寫像スル linear transformation デアル。且ツ

$$\|T\| = 1$$

---

(1) $\mathfrak{M}$ ハ $0 \leqq x \leqq 1$ ニテ定義サレタ Bounded variation ノ函數ノ空間（BV）トモ考ヘラレル。コノトキ $0 \leqq x \leqq 1$ ニテ定義サレタ Bounded variation ノ函數 $\varphi(x)$ ニ對シテ

$$\|\varphi\| = |\varphi(0)| + \underset{0 \leqq x \leqq 1}{\mathrm{Var.}}\ \varphi(x)$$

トオケバヨイ．但シ $\underset{0 \leqq x \leqq 1}{\mathrm{Var.}}\ \varphi(x)$ ハ $0 \leqq x \leqq 1$ ニ於ケル $\varphi(x)$ ノ total variation ヲ表ハス．（BV）ハ Banach 空間デアルガソコデノ linear functional ノ一般ノ形ガキマッテヰナイ。コレガ種々ノ問題デ困ル点デアル。

トナルコトモ容易ニワカル。但シ

$$\|T\| = \underset{\substack{\|\varphi\| \leqq 1 \\ \varphi \in \mathfrak{M}}}{l.u.b} \|T\varphi\|$$

ニヨッテ $\|T\|$ ヲ定義スル。更ニコノ linear operator T ニ對シテソノ iteration T^n ヲ考ヘレバ T^n ガ

$$T^n \varphi(E) = \int_0^1 \varphi(de_x) P^{(n)}(x, E)$$

$$P^{(n)}(x, E) = \int_0^1 P^{(n-1)}(x, de_y) P(y, E)$$

$$= \int_0^1 P(x, de_y) P^{(n-1)}(y, E)$$

$$P^{(1)}(x, E) \equiv P(x, E)$$

ニヨッテ與ヘラレ、且ツ

$$\|T^n\| = 1, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

トナッテヰルコトハ明カデアル。

我々ガコヽデ問題トシタイノハコノ linear operator T ニ對シテ $\frac{1}{n}(T + T^2 + \cdots\cdots + T^n)$ ガ $n \to \infty$ ナルトキ如何ナル收斂ヲスルカト云フコトデアル。コレヲ論ジルタメニハ $P(x, E)$ ニ何カ條件ガナケレバナラヌコトハ勿論デアル。コノ條件トシテ Doob 及ビ Doeblin ノ與ヘタモノガアル。

(1) Doob ノ條件: $0 \leqq x, y \leqq 1$ デ2変數ノ函數トシテ measurable ナ函數 $p(x, y)$ ガ存在シテ、任意ノ x 及ビ任意ノ Borel 集合 E ニ對シテ $P(x, E) = \int_E p(x, y)\, dy$ トナル。(即チ. Doeblin ノ論文

紹介 II, §4 ノ初メニ與ヘタ分解(△)ニ於テ $P_1(x, E)$, $P_2(x, E)$ ガ現ハレヌコト, 又ハ任意ノ x ニ對シテ $P(x, E)$ ガ E ノ函數トシテ absolutely continuous ナルコト)。シカモ $E_1 \supset E_2 \supset \cdots\cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots\cdots$, $\sum_{n=1}^{\infty} E_n = \Lambda$ ナル如キ任意ノ Borel 集合ノ系列 $\{E_n\}$ ニ對シテ $\lim_{n\to\infty} P(x, E_n) = 0$ ガ x ニ關シテ一樣ニ成立スル。

(2) Doeblin ノ條件: 二ツノ positive number η, $b > 0$ ガ存在シテ x ニ無關係ニ、$m(E) < \eta$ ナラバ $P(x, E) < 1 - b$ トナル。[2]

先ヅ Doob ノ條件 (1) ハソレト同等ナ次ノ條件 (3) デオキカヘラレル。

(3) 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ x ニ無關係ナ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ガ定マリ $m(E) < \delta$ ナラバ $P(x, E) < \varepsilon$ トナル。

(3) ガ (1) ヲ含ムコトハ殆ンド明クデアル. 何トナレバ

---

(2) Doob 及ビ Doeblin ハ何レモ $P(x, E)$ ノ代リニ $P^{(N)}(x, E)$ (N ハ integer, fixed) ニ對シテ上ノ條件ヲ述ベテキルガ $N = 1$ ノ場合ヲ論ズレバ十分ダアロウ。$\lim_{n\to\infty} \frac{T^N + T^{2N} + \cdots + T^{nN}}{n}$ ノ收斂狀況ガワカレバソレニヨッテ $\lim_{n\to\infty} \frac{T + T^2 + \cdots\cdots + T^n}{n}$ ノ收斂狀況ガワカルカラデアル。

先ヅ(3)ノ條件ヨリ $P(x, E)$ ハ各々ノ x ニ對シテ E ノ absolutely continuous ナ函数トナリ、シタガッテ、$P(x,E)=\int_E p(x,y)\,dy$ トナル如キ density $p(x,y)$ ガ存在スル。($p(x,y)$ ハ Doeblin ノ論文紹介 II, §4 ノ補助定理 1 ニヨッテ $0 \leqq x,\ y \leqq 1$ ニ於テ 2 変数(函数トシテ measurable デアル様ニトレル!)

更ニ $E_1 \supset E_2 \supset \cdots\cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots\cdots$ ニテ $\prod_{n=1}^{\infty} E_n = \Lambda$ ナラバ $m(E_n) \to 0$ トナルカラ、條件(3)ヨリ $P(x, E_n) \to 0$ ガ x ニ關シテ一様ニ成立スル。

逆ニ(1)ガ成立スルトキ(3)ガ成立スルコトハ次ノ様ニスレバワカル。

若シ(3)ガ成立シナケレバ少クトモ一ツノ $\varepsilon > 0$ ガ存在シテコレニ對シテ $m(E_n) < \frac{1}{2^n}$, $P(x, E_n) \geqq \varepsilon > 0$ トナル如キ Borel 集合ノ系列 $\{E_n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ存在スル。$\{E_n\}$ ハ必ズシモ monotone デハナイ。コレヲ monotone ニスルタメ $E_n^* \equiv E_n + E_{n+1} + \cdots\cdots$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ トオケバ $E_1^* \supset E_2^* \supset \cdots\cdots \supset E_n^* \supset E_{n+1}^* \supset \cdots\cdots$ トナリ、且ツ

$$
\begin{aligned}
m(E_n^*) &\leqq m(E_n) + m(E_{n+1}) + \cdots\cdots \\
&< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots\cdots = \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}
$$

トナルカラ $m(E_n^*) \to 0$ デアル。ヨッテ $E^* = \prod_{n=1}^{\infty} E_n^*$ トオケバ $m(E^*) = 0$. ヨッテ $F_n \equiv E_n^* - E^*$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ トオケバ

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots\cdots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots\cdots, \quad \prod_{n=1}^{\infty} F_n = \Lambda$$

ニテ且ツ（$m(E^*)=0$ ヨリ $P(x, E^*)=0$ ガ得ラレルカラ）。

$$P(x, F_n) = P(x, E_n^*) - P(x, E^*)$$
$$= P(x, E_n^*) \geqq P(x, E_n) \geqq \varepsilon > 0$$

デアル。コレハ Doob ノ條件(1)ニ矛盾スル。

此ノ如ク Doob ノ條件ヲ(3)ノ形ニ直シテ見ルトコレガ Doeblin ノ條件ニ比較シテ非常ニ強イモノデアルコトガ明カトナルデアロウ。

吉田氏ハ Doob ノ條件ノアル場合ハ T ガ $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ ナル linear operator トシテ weakly completely continuous ニナルコトヲ証明シ[3] コレニ、前ニ吉田氏ニヨッテ得ラレタ一般 Banach 空間ニ於ケル Mean ergodic Theorem[4] ヲ應用シテ $\frac{1}{n}(T+T^2+\cdots\cdots+T^n)$ ガ $n \to \infty$ ナルトキ强收斂スルコトヲ証明サレタ。コレハ Doob ガ得タ結果[5]ヨリモ良イ結果デアル。

次ニ私ハ、コノ吉田氏ノ考ヘヲ更ニ一般ニシテ、Doeblin

---

(3) 吉田氏ノ前々号ノ談話724参照。（紙上談話會165号）

(4) 吉田氏ノ談話720（紙上談話會164号）

(5) J. L. Doob: Stochastic processes with an integral valued parameter, Trans. Amer. M. S. 41 (1938)

ノ條件 (2) ガ滿足サレテキル場合ハ $\|T-V\|=\alpha<1$ トナル如キ weakly completely continuous ナ linear operator V ガ存在スルコトヲ證明シタイ。モシコレガ證明出來レバ前号ノ結果[(6)] ニヨツテ、ハリ $\frac{1}{n}(T+T^2+\cdots+T^n)$ ガ強收斂スルコトガワカル。

<u>$\|T-V\|=\alpha<1$ ナル如キ weakly completely continuous ナ linear operator V ガ存在スルコト。</u>

Doeblin ノ論文紹介 II ノ始メニノベタコトニヨリ、$P(x,E)$ ハ次ノ如キ形ニ分解スルコトガ出來ル。

$$P(x,E)=P_1(x,E)+P_2(x,E)+\int_E p(x,y)\,dy.$$

コヽニ $P_1(x,E)$ ハ $P(x,E)$ ノ dis continuous ナ部分，$P_2(x,E)$ ハ $P(x,E)$ ノ continuous デ singular ナ部分，$p(x,y)$ ハ density function デアル。且ツ Doeblin ノ論文紹介 II ノ補助定理 1 ニヨツテ $p(x,y)$ ハ $0\leq x,y\leq 1$ ニテ 2 変数ノ函数トシテ measurable ナモノニトルコトガ出來ル。又、任意ノ $x\ (0\leq x\leq 1)$ ニ對シテ、$p(x,y)>\frac{1}{\eta}$ トナル如キ点 y ノ集合 E_x ハ $m(E_x)<\eta$ ヲ滿足スル。ヨツテ今 $y\in E_x$ ナルトキ $q(x,y)=0$, $y\,\bar{\in}\, E_x$ ナルトキ $q(x,y)=p(x,y)$. ニヨツテ $q(x,y)$ ヲ $0\leq x,y\leq 1$ ニ於テ定義スレバ $q(x,y)$ ハ $0\leq x,y\leq 1$ ニテ 2 変數ノ函數トシテ measur-

(6) 紙上談話會 166 号, 1931. 定理 8 (508 頁)

able デ、$\leqq \frac{1}{\eta}$ デアリ且ツ

$$Q(x, E) = \int_E q(x, y)\, dy,$$

$$R(x, E) \equiv P(x, E) - Q(x, E)$$

トオケバ

$$R(x,E) = P_1(x,E) + P_2(x,E) + \int_E \big(p(x,y) - q(x,y)\big)\, dy$$

トナリ、$R(x, E)$ ハ任意ノ x, E ニ對シテ

$$0 \leqq R(x, E) < 1 - b$$

ヲ滿足スル。先ヅ $R(x, E) \geqq 0$ ナルコトハ明カ。$R(x, E) < 1 - b$ ナルコトヲ示スタメニ $P_1(x, E)$, $P_2(x, E)$ ガ positive ニナル部分 E'_x, E^2_x ヲ考ヘル。$m(E'_x) = m(E^2_x) = 0$ デアル。ヨツテ $R(x, E)$ ガ positive ニナル部分ハ $E'_x + E^2_x + E_x$ ニテ與ヘラレ[7]、コレハ $m(E'_x + E^2_x + E_x) < \eta$ ヲ滿足スル。

此ノ如クシテ $P(x, E)$ ノ分解:

$$P(x, E) = Q(x, E) + R(x, E)$$

ガ出來タカラ $Q(x, E)$ 及ビ $R(x, E)$ ニ對應スル $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ ナル linear operator ヲ夫々 $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ トスレバ

$$\mathbb{T} = \mathbb{V} + \mathbb{W}$$

---

(7) E_x ハ $p(x, y) > \frac{1}{\eta}$ ナル部分. シタガツテ $p(x,y) - q(x,y) > 0$ ナル部分. 即チ $\int_E \big(p(x, y) - q(x, y)\big)\, dy > 0$ トナル部分.

トナル。ヨッテ V ガ completely continuous ナルコト及ビ $\|\mathrm{W}\|=\alpha<1$ ナルコトヲ示セバ我々ノ目的ハ達セラレル。

$\|\mathrm{W}\|=\alpha<1$ ナルコト。 コレハ任意ノ x, E ニ對シテ $0 \leqq R(x, E) \leqq 1-b$ ナルコトハ明カ。$\alpha=1-b$ トオケバヨイ。

V ガ weakly completely continuous ナルコト.

$\varphi \in \mathfrak{M}$ ニ對シテ $\psi=\mathrm{V}\varphi \in \mathfrak{M}$ ハ

$$\psi(E)=\int_0^1 \varphi(de_x)\, Q(x, E)$$

ニヨッテ與ヘラレル。然ルニ $Q(x, E)=\int_E q(x, y)\, dy$ ナルコトヨリ

$$\psi(E)=\int_0^1 \varphi(de_x)\left(\int_E q(x, y)\, dy\right)$$

$$=\int_E\left(\int_0^1 \varphi(de_x)\, q(x, y)\right) dy$$

ヨッテ $g(y)=\int_0^1 \varphi(de_x)\, q(x, y)$ トオケバ $q(x, y) \leqq \frac{1}{\eta}$ トナルコトヨリ $g(y)$ ハ messurable デ且ツ有界 $\left(|g(y)| \leqq \frac{1}{\eta}\|\varphi\|\right.$ デアリ、

$$\psi(E)=\int_E g(y)\, dy$$

トナル。ヨッテ $\psi \in \mathfrak{M}$ ハ absolutely continuous デシカモソノ density ガ有界デアル。即チ $\mathfrak{M}$ ノ element

φ ノウチ absolutely continuous ナルモノ全体ヲ $\mathfrak{A}$ ニテ表ハシ、更ニ $\mathfrak{A}$ ノウチ、ソノ density g ガ有界ナ φ 全体ヲ $\mathfrak{A}_1$ ニテ表ハセバ ∇ ハ φ ヲ $\mathfrak{A}_1$ ノ中ヘウツス linear operator デアル。

サテ ∇ ガ $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ヘウツス linear operator トシテ weakly completely continuous ナルコトヲ証明シヨウ。コノタメニハ $\varphi_n \in \mathfrak{M}$, $\|\varphi_n\| \leq 1$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ヲ任意ニ與ヘタトキ、コレヨリソノ部分列 φ_{n_ν} $(\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$ 及ビ或ル $\varphi_0 \in \mathfrak{M}$ ヲ取ッテ $\nabla\varphi_{n_\nu}$ ガ φ_0 ニ弱收斂スルヤウニ出来ルコトヲ示セバヨイ。即チ $\mathfrak{M}$ デ定義サレタ任意ノ linear functional f ニ對シテ $f(\nabla\varphi_{n_\nu}) \longrightarrow f(\varphi_0)$ トナルコトヲ示セバヨイ。$\mathfrak{M}$ デ定義サレタ linear functional ノ一般ノ形ガ未ダワカッテヰナイノデ都合ガ悪イガ、コノ障碍ハ旨ク避ケラレル。即チ $\psi = \nabla\varphi$ ハ $\mathfrak{M}$ ノ element デアルノミナラズ $\mathfrak{A}$ ニ属シテ居リ、$\mathfrak{A}$ ハ (L)[8] ト isometrique デアルカラ、∇ ハ $\mathfrak{M}$ ヲ (L) ニ寫像スル linear operator デアルトモ考ヘラレル。

シカモ $\mathfrak{M}$ デ定義サレタ linear functional f ハ $\nabla(\mathfrak{M})$ (∇ ニヨル $\mathfrak{M}$ ノ range) ダケデ考ヘレバヨイノ

---

(8) (L) ハ $0 \leq x \leq 1$ デ定義サレタ measurable ナ函數 $g(x)$ デ $\int_0^1 |g(x)|\,dx < \infty$ ナルモノ全体ノ集合 $\|g\| = \int_0^1 |g(x)|\,dx.$

デアルカラ f ハ (L) デノ functional f^* デアルトモ考ヘラレル。(L) ノ conjugate space ハ (M)[9] デアルカラ $\varphi \to \psi \equiv \nabla \varphi$, $\psi(E) = \int_E g(y)\,dy$ トスレバ

$$f(\nabla\varphi) = f(\psi) = \int_0^1 \psi(de_y)\cdot\alpha(y)$$

$$= \int_0^1 g(y)\,\alpha(y)\,dy$$

ト云フ形デ表ハサレル。コヽニ $\alpha(y)$ ハ $0 \leqq y \leqq 1$ デ定義サレタ有界, measurable ナ函數デアル。シカモ $\psi \in \mathfrak{a}$, ナルコトヨリ、$g(y)$ ハ單ニ (L) ニ屬スルノミナラズ又 (M) ニモ屬シテキル。

ヨッテ我々ノ問題ハ $g_n \in (M)$, $\|g_n\| \leqq C$, $(n = 1, 2, \text{-----})$ ガ任意ニ與ヘラレタトキ、ソノ部分列 g_{n_ν} $(\nu = 1, 2, \text{-----})$ 及ビ $g_0 \in (L)$ ヲ取ッテ任意ノ $\alpha(y) \in (M)$ ニ對シテ

$$\int_0^1 g_{n_\nu}(y)\,\alpha(y)\,dy \to \int_0^1 g_0(y)\,\alpha(y)\,dy$$

トナルヤウニスルト云フ問題ニ reduce サレル。[10]

---

(9) $0 \leqq x \leqq 1$ デ定義サレタ有界, measurable ナ函數 $g(y)$ 全体ノ集合 $\|g\| = \operatorname*{ess.\,max}_{0 \leqq y \leqq 1} |g(y)|$.

(10) $g_0 \in (L)$ ナラシメルコトハ必ズシモ可能デナイダラウ。

此ノ如キ部分列ヲ求メルタメニハ次ノ様ニスレバヨイ。先ヅ(M)⊂(L)ニテ(L)ガ *separable* ナルコトヨリ(M)ハ(L)ノ *topology* デ *separable* デアル。ヨッテ(L)ノ *topology* ノイミデ(M)ニテ *dense* ナル $\alpha_m(y) \in (M)$ $(m=1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ取ルコトガ出来ル。コノ可附番個ノ $\alpha_m(y)$ ニ対シテ、始メノ $g_n \in (M)$ ニ *diagonal method* ヲホドコセバ $\{g_n\}$ ノ部分列 $\{g_{n_\nu}\}$ ガ存在シテ任意ノ m ニ對シテ

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_0^1 g_{n_\nu}(y)\alpha_m(y)\,dy$$

ハ収斂スル。トコロガ g_{n_ν} ハスベテ $\in(M)$ デアリ、$\{\alpha_m\}$ ハ(L)ノ *topology* ニテ(M)ニテ *dense* デアルカラ、任意ノ $\alpha \in (M)$ ニ對シテ

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_0^1 g_{n_\nu}(y)\alpha(y)\,dy$$

ガ存在スル。即チ $\{g_{n_\nu}\}$ ハ(L)ノ *element* ト考ヘレバ弱収斂スル。然ルニ(L)ハ *weakly complete* デアルカラ $g_0 \in (L)$ ガ存在シテ $\{g_{n_\nu}\}$ ハ(L)ノイミデ g_0 ニ弱収斂スル。即チ

$$\int_0^1 g_{n_\nu}(y)\alpha(y)\,dy \to \int_0^1 g_0(y)\alpha(y)\,dy$$

ガ任意ノ $\alpha(y)\in(M)$ ニ對シテ成立スル。(証明終)