739. Doeblin ノ論文紹介 II

角 谷　靜 夫 (阪大)

§4. final set ノ中ニ於ケル点ノ運動

§3ニ於テ final set ノ存在ガ証明サレタ。各々ノ final set G ヲ考ヘレバ一度 G ノ中ヘハイツタ点ハ決シテ (probability 0 ヲ除イテ) G ノ外ヘ出ナイカラ、各々ノ G ヲ Ω ト同様ニ一ツノ空間ト考ヘテソコデノ点ノ運動ヲ論ジルコトガ出來ル。

§4ニ於テハ Ω 全体ガ一ツノ final set デアルト假定スル。又 Ω ガ直線上ノ interval $0 \leqq x \leqq 1$ デアリ、measure $m(E)$ ガソコデノ Lebesgue measure デアルト假定スル。Ω 及ビ $m(E)$ 自身ガサウデナクテモ、Ω ヲ $0 \leqq x \leqq 1$ ヘ one-to-one ニ且ツ measure ヲ保ツヤウニ、シカモ $m(E)$ ガ Lebesgue measure ニナルヤウニ寫像スルコトガ出来レバ同様ノ議論ガ出来ルワケデアルカラ以上ノ假定ハ相當一般ナ場合ヲ含ムワケデアル。

假定ニヨリ $0 \leqq x \leqq 1$ ナル x 及ビ $0 \leqq x \leqq 1$ ノ部分 Borel 集合 E ニ對シテ $0 \leqq P(x, E) \leqq 1$ ナル $P(x, E)$ ガ定義サレ、コレハ x ヲ fix スレバ E ニ對シテ totally additive ナ集合函數デアリ、E ヲ fix スレバ $0 \leqq x \leqq 1$ ニ於ケル x ノ measurable function デアル。シカモ條件 (*) ヨリ $P^{(N)}(x, E)$ ヲ考ヘレバ $b, \eta > 0$

ガ存在シテ

$(*)$ $m(E)<\eta$ ナラバ $P^{(N)}(x, E)<1-\delta$

トナッテヰル。

次ニ一般ノ integer n ニ對シテ $P^{(n)}(x, E)$ ヲ考ヘル。コレハ x ヲ fix スレバ E ニツイテ totally additive ナ集合函數デアルカラ、ヨク知ラレタ如ク三ツノ部分ニ分レル:

$$(\triangle)\quad P^{(n)}(x, E)=P_1^{(n)}(x, E)+P_2^{(n)}(x, E)+P_3^{(n)}(x, E).$$

コヽニ $P_1^{(n)}(x, E)$ ハ $P^{(n)}(x, E)$ ノ discontinuous ナ部分(即チ高々可附番個ノ点ヘノ mass ノ分布), $P_2^{(n)}(x, E)$ ハ $P^{(n)}(x, E)$ ノ continuous デ singular ナ部分(即チ measure 0 ナル部分ヘノ continuous ナ mass ノ分布), $P_3^{(n)}(x, E)$ ハ $P^{(n)}(x, E)$ ノ absolutely continuous ナ部分デアル。$P^{(n)}(x, E)$ ハ又 density $p^{(n)}(x, y)$ ヲ用ヒテ

$$P_3^{(n)}(x, E)=\int_E p^{(n)}(x, y)\,dy$$

ト云フ形ニ表ハサレル。コヽニ $p^{(n)}(x, y)$ ハ x ヲ fix スルト y ニ關シテ $0\leq y\leq 1$ ニ於テ measurable, integrable ナ函數デ L ニ屬スル。シカモ $p^{(n)}(x, y)$ ハ各々ノ x ニ對シテ measure zero ノ y ノ集合ヲ除イテ unique ニ定マル。

補助定理 1. $p^{(n)}(x, y)$ ハ、各々ノ x ニ對シテ適當ニ、measure zero ノ y ノ集合デ値ヲ加ヘレバ、$0 \leqq x, y \leqq 1$ デ定義サレタ２変数ノ函数トシテ measurable ニナル。

證明: 先ヅ $0 \leqq y < y_0$ ナル interval ヲ $I(y_0)$ トオキ

$$F(x, y) \underset{def}{=\!=} P^{(n)}(x, I(y))$$

ヲ考ヘル. $F(x, y)$ ハ x ヲ fix スレバ y ニ關シテ單調非減少デ且ツ左側ニ半連続（即チ下ニ半連続）デアリ，y ヲ fix スレバ x ニ関シテ $0 \leqq x \leqq 1$ ニテ measurable ナ函数デアル。シカモ各々ノ x ニ對シテ measure zero ノ y ノ集合ヲ除ケバ

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(F(x, y+h) - F(x, y)\right) = p^{(n)}(x, y)$$

デアルカラ、$p^{(n)}(x, y)$ ヲ $0 \leqq x, y \leqq 1$ ニテ２変数ノ函数トシテ measurable ナモノニ取レルコトヲ示スニハ $F(x, y)$ が $0 \leqq x, y \leqq 1$ ニテ２変数ノ函数トシテ measurable デアルコトヲ示セバヨイ。

$F(x, y)$ が $0 \leqq x, y \leqq 1$ ニテ２変数ノ函数トシテ measurable デアルコトヲ示スタメニ real number α ニ對シテ $F(x, y) > \alpha$ トナル如キ点 (x, y) $(0 \leqq x, y \leqq 1)$ 全体ノ集合 $E(\alpha)$ ヲ考ヘル。

$E(\alpha)$ が任意ノ α ニ對シテ平面上ノ集合トシテ measur-

able デアルコトヲ云ヘバヨイ。 先ヅ各々ノ y ニ対シテ $F(x, y) > \alpha$ トナル如キ x 全体ノ集合ヲ $E(\alpha, y)$ トスレバ $E(\alpha, y_0)$ ハ $E(\alpha)$ ノ直線 $y = y_0$ ニヨル切口ノ x 軸ヘノ *projection* デアル。 $F(x, y)$ ガ x ヲ *fix* スルト y ニ関シテ単調非減少デアルコトヨリ、任意ノ $y_1 < y_2$ ニ対シテ $E(\alpha, y_1) \subset E(\alpha, y_2)$. ヨッテ $x \in E(\alpha, y_0)$, $y_0 < y \leqq 1$ ナル如キ点 (x, y) 全体ノ集合ヲ $E(\alpha, y_0) \times J(y_0)$ ニテ表セバ

$$E(\alpha) = \sum_{y} E(\alpha, y) \times J(y)$$

コヽニ $\sum_{y}$ ハ $0 \leqq y \leqq 1$ ナルアラユル y ニ対スル和ヲ表ハス。

然ルニ $F(x, y)$ ハ x ヲ *fix* スルト y ニ対シテ単調非減少デ下ニ半連続ナル故、 $E(\alpha)$ ノ直線 $x = x_0$ ニヨル切口ハ（空集合デナケレバ） $y_0 < y \leqq 1$ ナル如キ左側ニ *open* ナ *interval* デアル。ヨッテ、 $\sum_{y}$ ニ於ケル y ハアラユル $0 \leqq y \leqq 1$ ナル y ヲウゴク必要ナク、アラユル有理数ヲウゴケバ十分デアルコトガ分ル。[1]

ヨッテ

$$E(\alpha) = \sum_{r_n} E(\alpha, r_n) \times J(r_n)$$

ト書クコトガ出来ル。コヽニ $\{r_n\}$ ハ $0 \leqq y \leqq 1$ ナルアラユ

---

(1) $(x, y) \in E(\alpha)$ ナラバ $r < y$ ナル有理数 r ニテ $(x, r) \in E(\alpha)$ トナルモノガ存在スルカラ

ル rational number ヲ一列ニナラベタモノデアル。 此ノ如ク $E(\alpha)$ ヲ可附番個ノ集合ノ和トシテ表ハセバ各々ノ $E(\alpha, r_n) \times J(r_n)$ ハスベテ measurable ナル故 $E(\alpha)$ ガ平面上ノ集合トシテ measurable ナルコトガワカル。（補助定理1ノ証明終）

<u>補助定理 2.</u> $P^{(2N)}(x, E)$ ニ関スル density ヲ $p^{(2N)}(x, y)$ デ表ハセバ $m(A)>0$, $m(B)>0$ ナル二ツノ Borel 集合 A, B 及ビ positive number $\rho_0>0$ ガ存在シテ任意ノ $x \in A$, $y \in B$ ニ対シテ $p^{(2N)}(x, y) \geqq \rho_0 > 0$ トナル。

証明： 先ヅ $P^{(N)}(x, E)$ ヲ例ノ如ク分解スル：

$$P^{(N)}(x, E)=P_1^{(N)}(x, E)+P_2^{(N)}(x, E)+\int_E p^{(N)}(x, y)\,dy.$$

各々ノ x ニ対シテ $P_1^{(N)}(x, E)$ 及ビ $P_2^{(N)}(x, E)$ ガ positive ニナル部分ヲ夫々 E_x^1, E_x^2 トスレバ $m(E_x^1)=m(E_x^2)=0$ デアル。

次ニ $p^{(N)}(x, y)>\frac{1}{\eta}$ トナル如キ y 全体ノ集合（x ハ fix!）ヲ E_x^3 トスレバ $1 \geqq \int_{E_x^3} p^{(N)}(x, y)\,dy > \frac{1}{\eta} m(E_x^3)$ ナル故 $m(E_x^3)<\eta$ デアル。 $E_x^1+E_x^2+E_x^3=E_x^4$ トオケバ $m(E_x^4)<\eta$. 更ニ $\Omega - E_x^4$ ヲ $\frac{b}{2}<p^{(N)}(x, y) \leqq \frac{1}{\eta}$ ナル部分 E_x^5 ト $0 \leqq p^{(N)}(x, y) \leqq \frac{b}{2}$ ナル部分 E_x^6 トニ分テバ (1a)

(1a) $\frac{b}{2}<\frac{1}{\eta}$ トナルコトハ容易ニワカル。

$$1 = P^{(N)}(x, \Omega) = P^{(N)}(x, E_x^5) + P^{(N)}(x, E_x^6) + P^{(N)}(x, E_x^4)$$

$$\leqq \int_{E_x^5} p^{(N)}(x, y)\, dy + \int_{E_x^6} p^{(N)}(x, y)\, dy + (1-b)$$

$$(m(E_x^4) < \eta \text{ ナル故})$$

$$\leqq \frac{1}{\eta} m(E_x^5) + \frac{b}{2} m(E_x^6) + (1-b)$$

$$\leqq \frac{1}{\eta} m(E_x^5) + \frac{b}{2}(1 - m(E_x^5)) + (1-b)$$

$$= \left(\frac{1}{\eta} - \frac{b}{2}\right) m(E_x^5) + 1 - \frac{b}{2}$$

トナルカラ

$$m(E_x^5) \geqq \frac{\frac{b}{2}}{\frac{1}{\eta} - \frac{b}{2}} > \frac{b}{2\eta}$$

右辺ハ x ニ無関係ナ量デアル。ヨツテ結局、任意ノ x $(0 \leqq x \leqq 1)$ ニ對シテ $m(E_x) > \frac{b}{2\eta}$ ナル如キ measurable set $E_x \equiv E_x^5$（コレハ x ニ depend スル！）ガ $0 \leqq y \leqq 1$ ノ中ニ定マツテ、任意ノ $y \in E_x$ ニ對シテ $p^{(N)}(x, y) > \frac{b}{2\eta}$ トナル。シカモ $E_x^1 \equiv E_x$ ノ作リ方ヨリ $E_0 \equiv \sum_x (x) \times E_x$ ハ平面上ニ於イテ measurable ナ集合デアル。

E_0 ハ又明カニ $m_2(E_0) > 0$ ヲ満足スル。但シ m_2 ハ平面上ノ Lebesgue measure ヲ表ハス。良ク知ラレタ定理ニヨリ、E_0 ノ殆ンドスベテノ点ハ m_2 ニ関シテ

E_0 ノ density 1 ノ点デアル。ヨッテ二個ノ density 1 ノ点 P, Q ヲ E_0 内ニ取ッテ、P ノ第二座標ト Q ノ第一座標トガ一致スル様ニスルコトガ出来ル。即チ $P=(x_0, z_0)$, $Q=(z_0, y_0)$。(z_0 ハ共通) ト云フ物デアル。

コレハ次ノ様ニスレバワカル。E_0 ノ点ノウチ、E_0 ニ関スル density 1 ノ点全体ヲ E_1 トセヨ。E_1 ノ x 軸ヘノ projection ヲ F, y 軸ヘノ projection ヲ G トスレバ $m(F)=1$, $m^*(G) \geqq \frac{b}{2\eta}$ (16) デアル。

ヨッテ F, G ヲ同ジ interval $0 \leqq x \leqq 1$ 内ノ点集合ト考ヘレバ共通点 z_0 ガ存在スル。F ハ E_1 ノ x 軸上ヘノ projection デアルカラ $Q=(z_0, y_0) \in E_1 \subset E_0$ ナル点 Q ガ存在スル。同様ニ G ガ E_1 ノ y 軸上ヘノ projection デアルコトヨリ $P=(x_0, z_0) \in E_1 \in E_0$ ナル如キ点 Q ガ存在スル。

E_0 ノ characteristic function ヲ $\varphi(x, y)$ トセヨ。

$P=(x_0, z_0)$, $Q=(z_0, y_0)$ ハ何レモ E_0 ノ density 1 ノ点デアルカラ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シテ ρ ヲ十分

---

(16) m^* ハ外測度ヲ表ハス. F ガ measurable ナルコトハ容易ニ示サレルガ G ハ必ズシモ measurable デハナイ。$m_*(G) \geqq \frac{b}{2\eta}$ トナルコトモ容易ニワカル。但シ m_* ハ内測度。

小サクトルト

$$\int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho}\int_{z_0-\rho}^{z_0+\rho}\varphi(x,z)\,dx\,dz>(1-\varepsilon)\cdot 4\rho^2 \qquad (1)$$

$$\int_{z_0-\rho}^{z_0+\rho}\int_{y_0-\rho}^{y_0+\rho}\varphi(z,y)\,dz\,dy>(1-\varepsilon)\cdot 4\rho^2 \qquad (2)$$

トナル；先ヅ (1) ヲ考ヘル。 $x_0-\rho\leqq x\leqq x_0+\rho$ ナル x ＝テ且ツ

$$\int_{z_0-\rho}^{z_0+\rho}\varphi(x,z)\,dz<\frac{3}{2}\rho$$

トナル如キモノ全体ノ集合ヲ θ_1 トスレバ (1) ヨリ

$$m(\theta_1)\frac{3}{2}\rho+(2\rho-m(\theta_1))\cdot 2\rho>(1-\varepsilon)\cdot 4\rho^2$$

トナルカラ $m(\theta_1)<8\rho\varepsilon$ トナル。同様ニシテ (2) ヨリ $y_0-\rho\leqq y\leqq y_0+\rho$ ナル y ＝テ且ツ

$$\int_{z_0-\rho}^{z_0+\rho}\varphi(z,y)\,dz<\frac{3}{2}\rho$$

トナル如キモノ全体ノ集合ヲ θ_2 トスレバ $m(\theta_2)<8\rho\varepsilon$ デアル。

ヨツテ $\varepsilon<\frac{1}{4}$ ナル如クトツテ、 $A=[x_0-\rho, x_0+\rho]-\theta_1$, $B=[y_0-\rho, y_0+\rho]-\theta_2$ トオケバ $m(A)>0$, $m(B)>0$ ニテ、且ツ任意ノ $x\in A$, $y\in B$ ニ對シテ

$$\int_{z_0-\rho}^{z_0+\rho}\varphi(x,z)\,dz\geqq\frac{3}{2}\rho,\quad \int_{z_0-\rho}^{z_0+\rho}\varphi(z,y)\,dz\geqq\frac{3}{2}\rho$$

ナル故

$$\int_0^1 \varphi(x,z)\varphi(z,y)\,dy \geqq \int_{z_0-\rho}^{z_0+\rho} \varphi(x,z)\varphi(z,y)\,dz$$

$$= \int_{z_0-\rho}^{z_0+\rho} \Big\{ (1-\varphi(x,z))(1-\varphi(z,y)) + \varphi(x,z) + \varphi(z,y) - 1 \Big\}\,dz$$

$$\geqq \int_{z_0-\rho}^{z_0+\rho} \varphi(x,z)\,dz + \int_{z_0-\rho}^{z_0+\rho} \varphi(z,y) - \int_{z_0-\rho}^{z_0+\rho} dz$$

$$\geqq \frac{3}{2}\rho + \frac{3}{2}\rho - 2\rho = \rho$$

ヨッテ $p^{(N)}(x,y) \geqq \frac{b}{2}\cdot\varphi(x,y)$ ナルコトヨリ

$$p^{(2N)}(x,y) \geqq \int_0^1 p^{(N)}(x,z)\,p^{(N)}(z,y)\,dz^{(2)}$$

$$\geqq \left(\frac{b}{2}\right)^2 \int_0^1 \varphi(x,z)\,\varphi(z,y)\,dy$$

$$\geqq \left(\frac{b}{2}\right)^2 \rho \equiv \rho_0 > 0$$

（補助定理２ノ証明終）

<u>補助定理3.</u> 補助定理２ニテ定マッタ集合 B ノ中ニ更ニ $m(L) > 0$ ナル measurable set L が存在シテ或ル integer m, 及ビ或ル positive number

---

(2) 一般ニ $p^{(m+n)}(x,y) \geqq \int_0^1 p^{(m)}(x,z)\,p^{(n)}(z,y)\,dy$ が成立スル.

コレハ $p^{(m+n)}(x,y) = \int_0^1 P^{(m)}(x,de_z)\,p^{(n)}(z,y)$

$$\geqq \int_0^1 p^{(m)}(x,z)\,p^{(n)}(z,y)\,dz$$

ヨリ明カ。

$\rho_1 > 0$ ニ對シテ

$$p^{(m_1)}(x, A) \geqq \rho_1 > 0$$

ガ任意ノ $x \in L$ ニ對シテ成立スル。

証明： コレハ殆ド明カデアル。即チ ∇_n ヲモッテ $p^{(n)}(x, A) > 0$ トナル如キ点 x 全体ノ集合トスレバ ∇_n ハ measurable デアル。Ω ガ final set ナルコト及ビ $m(A) > 0$ ナルコトヨリ、任意ノ $x \in \Omega$ ニ對シテ、$P^{(n)}(x, A) > 0$ ナル如キ integer n ガ定マルカラ

$$\Omega = \nabla_1 + \nabla_2 + \cdots\cdots + \nabla_n + \cdots\cdots$$

トナル。コヽニ ∇_n ハ互ニ共通点ヲモッカモ知レナイ。$m(B) > 0$ ナル故、或ル m_1 ニ對シテ $m(B \cdot \nabla_{m_1}) > 0$. ヨッテ更ニ $P^{(m_1)}(x, A) > \varepsilon$ ナル如キ x 全体ノ集合ヲ $\nabla_{m_1, \varepsilon}$ トスレバ十分小サイ positive number ρ_1 ニ對シテ $m(B \cdot \nabla_{m_1, \rho_1}) > 0$. $L = B \cdot \nabla_{m_1, \rho_1}$ トトレバヨイ。

（補助定理3ノ証明終）

補助定理3ニテ得ラレタ L, m_1, ρ_1 ニ對シテ任意ノ $x, y \in L$ ニ對シテ $p^{(m_1+2N)}(x, y) > \rho_0 \rho_1$ ガ成立スル。何トナレバ

$$p^{(m_1+2N)}(x, y) = \int_0^1 P^{(m_1)}(x, de_z)\, p^{(2N)}(z, y)$$

$$\geqq \int_A P^{(m_1)}(x, de_z)\, p^{(2N)}(z, y)$$

$$\geqq \rho_0 P^{(m_1)}(x, A) > \rho_0 \rho_1 .$$

此ノ如クシテ、適當ニ B ノ中ニ $m(L)>0$ ナル measurable set L ヲトレバ或ル m_1, ρ_1, ρ_0 ニ對シテ

$$\begin{cases} \text{任意ノ } x\in L \text{ ニ對シテ } P^{(m_1)}(x,A) \geqq \rho_1 > 0 \\ \text{任意ノ } x\in A,\ y\in L \text{ ニ對シテ } p^{(2N)}(x,y) \geqq \rho_0 > 0 \\ \text{任意ノ } x\in L,\ y\in L \text{ ニ對シテ } p^{(m_1+2N)}(x,y) \\ \qquad\qquad \geqq \rho_0\rho_1 > 0 \end{cases}$$

トナルコトガワカッタ。

今カヽル (L, m_1+2N) ノ組全体ヲ考ヘル。同ジ L ニ對シテモ異ナル m_1 ガ對應シテヰルカモシレナイ。$m=m_1+2N$ トオキ L ガカヽルフラユル B ノ部分集合ヲウゴクトキノ m 全体ノ集合ヲ $\mathfrak{M}$ トスル。$\mathfrak{M}$ ノ最大公約数ヲ d トセヨ。

以下ノ議論ハ $d>1$ ナル場合ト $d=1$ ナル場合トニ分レル。

$\boxed{d>1 \text{ ナルトキ}}$

補助定理 4. $d>1$ ナルトキハ Ω ハ d 個ノ measurable set (互ニ共通点ナキ) $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_d$ 及ビ measure 0 ノ集合 U_0 ニ分タレ、任意ノ $x\in U_i$ ニ對シテ $P(x, U_{i+1})=1$ トナル。($x\in U_d$ ナルトキハ $P(x, U_1)=1$).

即チ U_i 内ノ点 x ハ単位時間後ニハ probability 1 ヲモツテ U_{i+1} ニハイッテ來ル。又任意ノ $x\in\Omega-U_0$ 及ビ integer n ニ對シテ $P^{(n)}(x, U_0)=0$.

証明:　補助定理3ノ証明ニテ用ヒタ分解

$$\Omega = V_1 + V_2 + \cdots\cdots + V_n + \cdots\cdots$$

ヲ用ヒテ

$$W_1 = V_d + V_{2d} + V_{3d} + \cdots\cdots$$

$$W_2 = V_{d-1} + V_{2d-1} + V_{3d-1} + \cdots\cdots$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$W_i = V_{d+1-i} + V_{2d+1-i} + V_{3d+1-i} + \cdots\cdots$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$W_d = V_1 + V_{d+1} + V_{2d+1} + \cdots\cdots$$

トオク。V_i ト V_j $(i \neq j)$ トハ互ニ *measure positive* ナ共通点ヲ持ツテヰルカモ知レナイガ W_i ト W_j ハ $m(W_i \cdot W_j) = 0$ $(i \neq j)$ ヲ満足スル。何トナレバ $m(W_i \cdot W_j) > 0$ ナル如キ W_i, W_j $(i \neq j)$ ガ存在シタトスレバ少クトモ一組ノ V_{md+1-i}, V_{nd+1-j} ガ存在シテ $m(V_{md+1-i} \cdot V_{nd+1-j}) > 0$.

然ルニ V_n ハ $P^{(n)}(x, A) > 0$ ナル如キ点 x 全体ノ集合デアツタカラ $\varepsilon > 0$ ヲ十分小サクトレバ $P^{(md+1-i)}(x, A) > \varepsilon$ ナル如キ点 x 全体ノ集合 $V_{md+1-i,\varepsilon}$ 及ビ $P^{(nd+1-j)}(x, A) > \varepsilon$ ナル如キ x 全体ノ集合 $V_{nd+1-j,\varepsilon}$ ハ $m(V_{md+1-i,\varepsilon} \; V_{nd+1-j,\varepsilon}) > 0$ ヲ満足スル。$\Theta \equiv V_{md+1-i,\varepsilon} \; V_{nd+1-j,\varepsilon}$ トオケ。$m(\Theta) > 0$ デアルカラ、先ニ補助定理3ニ於テ L ヲ *define* シタノト全ク同様ニシテ、B ノ内部ニ $m(L) > 0$ ナル *measurable set* L ヲ取ツテ、コレガ或ル

integer r 及ビ positive number ρ_2 ニ對シテ、任意ノ $x \in L$ ニ對シテ $P^{(r)}(x, \Theta) \geqq \rho_2 > 0$ ヲ滿足スル様ニスルコトガ出來ル。コノ L, r, ρ_2 ヲ用ヒルト任意ノ $x \in L$ ニ對シテ

$$P^{(r+md+1-i)}(x, A) \geqq \int_{\Theta} P^{(r)}(x, de_2) P^{(md+1-i)}(z, A)$$

$$\geqq \varepsilon \int_{\Theta} P^{(r)}(r, de_2) = \varepsilon \cdot P^{(r)}(x, \theta)$$

$$\geqq \varepsilon \cdot \rho_2 > 0$$

同様ニシテ

$$P^{(r+nd+1-j)}(x, A) \geqq \varepsilon \cdot \rho_2 > 0$$

ヨツテ $r+md+1-i+2N$, $r+nd+1-j+2N$ ハ何レモ $\mathfrak{M}$ ニ屬シ $i \equiv j \ (\mathrm{mod.}\ d)$ トナル。

コレハ $i \neq j$, $1 \leqq i$, $j \leqq d$ ニ矛盾スルカラ $m(W_i \cdot W_j) = 0$ デナケレバナラナイ。

コレデ $m(W_i \cdot W_j) = 0 \ (i \neq j)$ トナルコトハワカツタガ W_i ト W_j $(i \neq j)$ ハ共通點ヲモツテ居ルカモ知レナイ。シカシ、任意ノ n ニ對シテ $P^{(n)}(x, W_i \cdot W_j) > 0$ トナル如キ點 x ノ集合 $W_{i,j,n}$ ハ $m(W_{i,j,n}) = 0$ ヲ滿足スルコトガワカル。コレハ上ニテ $m(W_i \cdot W_j) = 0$ $(i \neq j)$ ヲ證明シタノト全ク同ジ方法デ示サレル。

$$W_i \cdot W_j + \sum_{n=1}^{\infty} W_{i,j,n} \equiv W_{i,j}$$ トオケバ $m(W_{i,j}) = 0$ ニテ且ツ任意ノ $x \in \Omega - W_{i,j}$ 及ビ任意ノ integer

n ニ對シテ $P^{(n)}(x, W_{i,j}) = 0$ トナル。何トナレバ若シ $P^{(n)}(x, W_{i,j}) > 0$ ナラバ $P^{(n)}(x, W_i \cdot W_j) > 0$ トナルカ，又ハ少クトモ一ツノ integer m ニ對シテ $P^{(n)}(x, W_{i,j,m}) > 0$. 前者ノ場合ハ $x \in W_{i,j,n}$ トナッテ $p \in \Omega - W_{i,j} \subset \Omega - W_{i,j,n}$ トナッテ矛盾スル。後者ノ場合ハ十分 $\varepsilon > 0$ ヲ小サクトルト $P^{(n)}(x, W_{i,j,m,\varepsilon}) > 0$. 但シ $W_{i,j,m,\varepsilon}$ ハ $P^{(m)}(x, W_i \cdot W_j) > \varepsilon$ トナル如キ x 全体ノ集合デアル。ヨッテ

$$P^{(m+n)}(x, W_i \cdot W_j) = \int_{\Omega} P^{(n)}(x, de_y)\, P^{(m)}(y, W_i \cdot W_j)$$

$$\geqq \int_{W_{i,j,m,\varepsilon}} P^{(n)}(x, de_y) \cdot P^{(m)}(y, W_i \cdot W_j) \geqq \varepsilon \int_{W_{i,j,m,\varepsilon}} P^{(n)}(x, de_y)$$

$$= \varepsilon \cdot P^{(n)}(x, W_{i,j,m,\varepsilon}) > 0.$$

従ッテ $x \in W_{i,j,m+n}$ デナケレバナラナイ。コレハ

$x \in \Omega - W_{i,j} = \Omega - \sum_{n=1}^{\infty} W_{i,j,n}$ ニ矛盾スル。

此ノ如クシテ $m(W_{i,j}) = 0$ ナルコト及ビ、任意ノ $x \in \Omega - W_{i,j}$ 及ビ任意ノ integer n ニ對シテ $P^{(n)}(x, W_{i,j}) = 0$ ナルコトが示サレタカラ $U_0 = \sum_{1 \leqq i < j \leqq \alpha} W_{i,j}$ トオケバ U_0 ハ補助定理ノ條件ヲ満足スル。

次ニ $U_i = W_i - U_0 \cdot W_i$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, \alpha$ トオケバ，コノ U_i が求ムルモノデアルコトヲ證明シヨウ。即チ、任意ノ $x \in U_i$ ニ對シテ $P(x, W_{i+1}) = 1$ ($i = 1$,

$2, -----, \alpha)$[3] トナルコトヲ証明シヤウ。

若シコレガ成立シナケレバ少クトモ一組ノ $i, j\ (i \neq j)$ ガ存在シテ、アル $x \in \mathfrak{V}_i$ ニ對シテ $P(x, \mathfrak{V}_{j+1}) > 0$ トナル。又ハ $P(x, \mathfrak{W}_{j+1}) > 0$. ヨッテ $\mathfrak{W}$ ノ定義ヨリ少クトモ一ツ $\nabla_{n\alpha+1-(j+1)} \equiv \nabla_{n\alpha-j}$ ガ存在シテ $P(x, \nabla_{n\alpha-j}) > 0$. 更ニ $P^{(n\alpha-j)}(x, A) > \varepsilon$ ナル点 x 全体ノ集合ヲ $\nabla_{n\alpha-j,\varepsilon}$ トスレバ十分小サイ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $P(x, \nabla_{n\alpha-j,\varepsilon}) > 0$.

ヨッテ

$$P^{(n\alpha-j+1)}(x, A) = \int_{\Omega} P(x, de_y) P^{(n\alpha-j)}(y, A)$$

$$\geqq \int_{\nabla_{n\alpha-j,\varepsilon}} P(x, de_y) P^{(n\alpha-j)}(y, A)$$

$$\geqq \varepsilon \cdot P(x, \nabla_{n\alpha-j,\varepsilon}) > 0.$$

ヨッテ $x \in \nabla_{n\alpha-j+1} \subset \mathfrak{W}_j$. 假定ニヨリ $x \in \mathfrak{V}_i \subset \mathfrak{W}_i$ デアルカラ $x \in \mathfrak{W}_i \cdot \mathfrak{W}_j \subset \mathfrak{V}_0$. コレハ $x \in \mathfrak{V}_i$ ニ矛盾スル。

ヨッテ $x \in \mathfrak{V}_i$ ナラバ $P(x, \mathfrak{V}_{i+1}) = 1$ デナケレバナラナイ。（補助定理4ノ証明終）

補助定理4ニヨッテ *final set* Ω ハ α 個ノ $\mathfrak{V}_i$ ト殘リノ $\mathfrak{V}_0$ トニ分解サレタガ、$\mathfrak{V}_0$ ノ性質ヨリ $\Omega - \mathfrak{V}_0$ ハ又一ツノ *final set* ニナッテヰルコトガワカル。ヨッテ *final set* トシテ $\Omega - \mathfrak{V}_0$ ヲ考ヘルコトニスレバ *final*

(3) $\mathfrak{W}$ ノ *suffix* ハイツモ $mod.\ \alpha$ デ考ヘルコトニスル。

set ガ丁度 d 個ノ共通点ナキ部分 $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_d$ ニ分配サレ、$x \in U_i$ ナルトキ $P(x, U_{i+1}) = 1$ トナルコトガワカツタ。

今特ニ $P^{(d)}(x, E)$ ヲ考ヘレバ任意ノ $x \in U_i$ ニ對シテ $P^{(d)}(x, U_i) = 1$ トナル。ヨツテ單位時間ノ d 倍ヲ一ツノ新シイ單位ト考ヘレバ、ソレニ關シテ各々ノ U_i ハ夫々 *final set* ニナツテヰルコトガワカル。シカモコノ *final set* ノ中デノ運動ハ $d=1$ ノ場合トナツテヰルコトハ容易ニワカルデアロウ。

$d>1$ ナル場合ノ $\lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}(x, E) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(P(x,E) + P^{(2)}(x, E) + \cdots\cdots + P^{(n)}(x, E)\right)$ ノ收斂狀況ヲシラベネバナラナイガ、ソノ前ニ $d=1$ ノ場合ヲ考ヘルコトニスル。

——（以下次号）——