

1741. 大數ノ法則 II

北川 敏男 (阪大)

§2. 豫備的ナ考察 (純キ) 前回, §デハ, 適當ナ條件ノモトニ於テハ, 必ズシモ "相互ニ独立" デナクトモ, 等式 (1) が成立ツコトヲ示シタ. $E\{S_n^2\} = E\{X_1^2\} + \dots + E\{X_n^2\}$ ハ此ト共ニ増加スル一方向アルカラ、前記 a, b, c, d ノ何レカガ成リ立テバ, 聯鎖ナ確率変數ノ和ニ関シテモ, 相互ニ独立ナ確率変數ノ和ト同様ニ標準偏差増加ノ原理ガ成立ツコトニナル.

然ラバ, 散縮度 (*dispersion*) ニ関シテハ如何. コレヲ次ニ論ズル.

(2) 散縮度増加ノ原理 先ツ準備トシテ條件付確率 (*conditional prob.*) ニ関シテ若干ノ事項ヲ述ベル. 一般ニ, 事象 A, B ガ共ニ起ル確率ヲ $Pr. \{A, B\}$ デ示ス. A ナル事象ト $X < x$ ナル事象トガ同時ニ起ル確率 $Pr \{A, X < x\}$ ヲ考ヘル, コレハ x ノ函数ガカラ $F_1(x)$ デ表ハス. 然ルトキ $a \leq X < b$ ナル條件ノモトデ A ノ起ル確率ハ $\{F_1(b) - F_1(a)\} / \{F(b) - F(a)\}$ デアツテ, x ノ値ハ ≥ 0 デ且ツ ≤ 1 デアル. (但シ X ノ分布函数ヲ F トシタ) 従ツテ

$$(3) Pr. \{A, X < x\} = \int_{-\infty}^{x-0} g_A(x) dF(x)$$

トナル如キ $g_A(x)$ ガ存在スル. 今特ニ A ヲバ, 或ル確率変

数 Y が X による事象とし、

$\text{Pr.} \{A, X < x\} \equiv \text{Pr.} \{Y < y, X < x\}$ なる $F(x, y)$,
 上、 $g_A(x)$ なる $G(x, y)$ を表はすと、(3) 式へ次、如く書
 き改められル:

$$(3') \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^{x-0} G(z, y) dF(z)$$

コレカラ、聯鎖 + 確率変数ノ和ノ散縮度増加ノ原理トモ見做
 せられべき次ノ結果ニ達スル。

定理 1. X ヲ知レトキニ、 Y ノ従フ條件付確率法則
 ノ散縮度ガ、 X ノ値ニ無関係ニ常數ヲ下カラ抑ヘラレル
 トキニハ、 $X+Y$ ノ(先驗的)確率法則ノ散縮度モ、コノ
 常數ヲ下カラ抑ヘラレル。(1)

注意: $X+Y$ ノ先驗的確率法則ノ分布函數ヲ F 表
 へサリ。散縮度ノ逆函數タル濃度函數ニツイテ云ヘバ、上ノ
 定理ノ主張スルコトハ; 任意ノ $l > 0$ 對シテ

$$(4) \quad \begin{aligned} & l. u. b. \left\{ F(\Delta+l) - F(\Delta-0) \right\} \\ & \quad \quad \quad -\infty < \Delta < \infty \\ & \leq l. u. b. \left\{ G(u, y+l) - G(u, y-0) \right\} \\ & \quad \quad \quad -\infty < u, y < \infty \end{aligned}$$

而シテ、 $F(\Delta)$, $G(u, y)$ ハ夫々 Δ, y = 関シテ分布函
 數ヲ、一般ノ規約ニ依リ上ニ(從ツテ右ニ)半連続トシテオ

(1) P. Lévy: Propriétés asymptotiques des
 sommes de variables aléatoires en-
 chaînées. Bull. Scien. Math. LIX (1935)
 コレヲ [L1] 示ス。

クト, (4) / l.u. b. \wedge Max. \Rightarrow 置キカヘテヨイ。

定理 1 の証明:

$$F(\delta) = \int_{x+y < \delta} d_{x,y} F(x,y) = \int_{x+y < \delta} d_{x,y} \left[\int_{-\infty}^{x-y} G(u,y) dF(u) \right]$$

ダブルカラ、積分変数ノ変換ニ依リ、コレハ

$$\int_{-\infty}^{\delta} dy \left\{ \int_{-\infty}^{\delta-y} G(u,y) dF(u) \right\}$$

= 等シク、従ツテ

$$F(\delta+l) - F(\delta) = \int_{-\infty}^{\delta} dy \left\{ \int_{-\infty}^{\delta-y} (G(u,y+l) - G(u,y)) dF(u) \right\}$$

(4) ハコノ式カラ導カレヌ。⁽²⁾

(3) Kolmogoroff / 不等式 / 拡張。

Kolmogoroff⁽³⁾ の Math. Ann. 99 = 於テ相互 = 独立

ナ確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n / 和 $S_k = X_1 + \dots + X_k$

($k = 1, 2, \dots, n$) = 関レテ $E(X_j) = 0, E(X_j^2) = \sigma_j^2$ ト

スルトキ、 $T = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$ ト置クトキ

$$(5) \Pr. [T \geq a] \leq \frac{1}{a^2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$$

ヲ示シタ。ソレハ、独立級数ノ収斂スル確率ヲ計算スルトキ、

有数ナ不等式ヲアツタ。コレヲ適當ナ條件ノモトニ於テ聯立

ノ場合ニモ拡張出来ナイカ。コレニ関レテ

(2) 實際ハコレカラ多少手間ガカナル。

(3) Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen.

定理 2. (聯鎖+) 確率変数ノ系列 $\{X_\nu\} =$ 於テ、

次ノ三條件ガ満足サレテ居ルトスル。

$$(1) \quad E_{\nu-1} \{X_\nu\} = 0 \quad (\nu=1, 2, 3, \dots)$$

$$(6) \quad E \{X_\nu^2\} < \infty \quad (\nu=1, 2, 3, \dots)$$

$$(7) \quad E \{S^2\} \equiv E \left\{ \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} X_\nu \right)^2 \right\} \equiv b < \infty$$

然ルトキニハ

$$(8) \quad T = \text{Max}_{1 \leq \nu < \infty} |S_\nu|$$

ニ依ツテ 確率変数 T ヲ定義スルバ; 任意, $c > 0 =$
對シテ

$$(9) \quad \text{Pr.} \{T > cb\} < \frac{1}{c^2}.$$

注意 1: $E \{X_\nu^2\}$ ガ有限ナコトカラ、 $E_p \{X_\nu^2\}$ (即チ、 X_1, X_2, \dots, X_p ノ値ヲ知ツテ、 X_ν^2 ノ平均値、コレハ、 $(X_1, X_2, \dots, X_p) =$ 與ル値ニ依ツテ変リ得ル確率変数ナル) ニ亦、確率 0 ノ場合ヲノビテ有限ナル。コレハ一般ニ、 $n < N$ ナラバ

$$(10) \quad P_{V_n} \{E\} = E_n \{P_{V_N} \{E\}\}, \quad E_n \{X\} = E_n \{E_N \{X\}\}$$

トナルコトカラ明ラカナル。 ($E \{X_\nu^2\} \equiv E_0 \{X_\nu^2\} =$ 外ナラヌ)

注意 2: 條件 (C) $1 \in 1 =$ 於テハ

$$(11) \quad E_p \{S_n^2\} = E_p \{S_{n-1}^2\} + 2E_p \{S_{n-1} X_n\} + E_p \{X_n^2\}$$

$$= E_p \{ S_{n-1}^2 \} + E_p \{ X_n^2 \}$$

定理 2 の証明: 今 $b =$

$$(12) \quad T_n = \text{Max}_{1 \leq \nu \leq n} |S_\nu|$$

ト置ク。 E'_ν ハ、 $X_1, X_2, \dots, X_\nu =$ 對シテハ、次ノ事象 (E'_ν) が起ツクト假定シテ場合ノ、或ル確率変數ノ平均値ヲ意味スルトスル:

$$(13) \quad T_{\nu-1} \leq cb, \quad |S_\nu| > cb$$

然ルトキニハ

$$E'_\nu \{ S^2 \} = E'_\nu \{ S_\nu^2 \} + \sum_{p=\nu+1}^{\infty} E'_\nu \{ X_p^2 \} \geq E'_\nu \{ S_\nu^2 \}$$

從ツテ、証明スベキ結果ハ、次ノ如クシテ得ラレル:

$$\begin{aligned} b^2 = E \{ S^2 \} &\geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{Pr.} \{ E'_\nu \} E'_\nu \{ S^2 \} \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{Pr.} \{ E'_\nu \} E'_\nu \{ S_\nu^2 \} \\ &\geq c^2 b^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \text{Pr.} \{ E'_\nu \} = c^2 b^2 \text{Pr.} \{ T > cb \}. \end{aligned}$$

— (証 終) —

注意 3: 定理 2 ハ 聯鎖級數 = 間シテ述ベク。勿論、有限個ノ和ノ場合ニハ $\text{Pr.} \{ T_n > cb_n \} \leq 1/c^2$ が成立ツ。

注意 4: 前記ノ Kolmogoroff ノ論文ニハ、(5) 以外ノイロイロト不等式ガ擧ゲラアツテ、ソレラハ皆必要ナモノデアツタ。從ツテ、吾々モ (9) = 満足セズ、更ニソレラニ對應スルモノガ定理 2 ノ條件ノモトヲ得ラレルカドウカ、當ツテ見ルコトハ無駄ヲナイト思フ。

[4] 特性函数ノ方法 相互=独立ノ確率変数ノ和 $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ノ特性函数ハ、各々ノ特性函数ノ乗積=ナル。即チスベテノ $-\infty < t < \infty$ =對シテ

$$(14) \quad E \{ e^{it(X_1 + X_2 + \dots + X_n)} \} \\ = E \{ e^{itX_1} \} E \{ e^{itX_2} \} \dots E \{ e^{itX_n} \}$$

コノ事實ガ、独立級数ノ研究ヲ容易トラシメル。(14)ハ X_1, X_2, \dots, X_n ガ相互=独立ノタメノ必要條件=止ラズ、實ハ充分條件テモアル。(Kac) 即チ(14)ナル關係ノ成立スルモノハ相互=独立トモノ=限ル。從ツテ、(14)ソノモノハドウ=モ出来ナイ。コレヲ聯鎖トモノ=拡張出来ナイ。シカシ特性函数ヲ利用スル方法及ビ結果ヲ吟味シテ見レバ、或ル結果ヲ導クノ=ハ、(14)ソノモノガ必要デハナイデアアル。

S. Bernsteinハ、聯鎖級数ノ有名ナ研究⁽⁴⁾=於テ、特性函数ヲ上述ノ見方カラ利用シ、聯鎖級数=關スル中心極限定理ヲ証明シタ。ソノ方法ハ、独立級数=關スル(特性函数ヲ利用シテノ)現在知ラレテ居ル Feller × Cramérノ方法=比ベルトモット発展ノ餘地ガアル様=思ハレルデアアルガ、ソレデモ相當=有效トモノデアツ

(4) Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes. Math. Ann. 97 コレヲ[B]ヲ引用スル。

テ、事實 *Joebelin*⁽⁵⁾ , *Markoff* 聯鎖ノ最近ノ研究
ニ於テモコレヲ採用シテ居ル。

- (5) *Sur les propriétés asymp. de mouvements
régis par certains types de chaînes simples.*
Bull. Math. Roumaine. (1937) コレヲ [D] ナ
引同スル。