743. *Doeblin* ノ論文紹介 III

角谷　静夫（阪大）

§4. 續キ

$\boxed{d=1 \text{ ナルトキ}}$　Ω 全体ガ一ツノ *final set* デ且ツ $d=1$ トナル場合ヲ考ヘル。

<u>補助定理5.</u>　$d=1$ ナルトキハ任意ノ $x\in\Omega$ 及ビ任意ノ *Borel* 集合 $E\subset\Omega$ ニ對シテ $\lim_{n\to\infty}P^{(n)}(x,E)=P(E)$ ガ x 及ビ E ニ關シテ一様ニ收斂スル。シカモ $|P^{(n)}(x,E)-P(E)|\leqq K\cdot\tau^n$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ガ成立スル如キ（x, E ニ無關係ナ）常數 K, τ（$0<\tau<1$）ガ存在スル。

補助定理ヲ証明スルタメニハ次ノ補助定理6ヲ証明スレバヨイ。

<u>補助定理6.</u>　$d=1$ ナルトキハ *positive integer* M 及ビ *positive number* τ_1（$0<\tau_1<1$）ガ存在シ

テ、$p^{(M)}(x, y) \geqq \tau_1$ ガ任意ノ $x \in \Omega$ 及ビ任意ノ $y \in B$ ニ對シテ成立スル。但シ $p^{(M)}(x, y)$ ハ $P^{(M)}(x, E)$ ノ density デアリ、B ハ補助定理2ニテ得ラレタ Borel 集合デアル。

補助定理6ヨリ補助定理5ガ得ラレルコトノ証明：

任意ノ Borel 集合 $E \subset \Omega$ 及ビ $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ニ對シテ $P^{(n)}(E)$ 及ビ $p^{(n)}(E)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

$$P^{(n)}(E) = \underset{x \in \Omega}{l.u.b}\, P^{(n)}(x, E),$$

$$p^{(n)}(E) = \underset{x \in \Omega}{g.l.b}\, P^{(n)}(x, E).$$

明カニ

$$p^{(n)}(E) \leqq p^{(n+1)}(E) \leqq P^{(n+1)}(E) \leqq P^{(n)}(E),$$

$$n = 1, 2, \cdots\cdots$$

デアル。ヨッテ任意ノ Borel 集合 $E \subset \Omega$ ニ對シテ

$$0 \leqq P^{(nM)}(E) - p^{(nM)}(E) \leqq \tau_2^{\,n}, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots;$$

$$0 < \tau_2 < 1$$

ナルコトヲ証明スレバ補助定理5ノ証明ハ完結スル。但シ M ハ補助定理6ニ現ハレル M デアル。

先ヅ任意ノ integer m 及ビ任意ノ $x, y \in \Omega$ 及ビ任意ノ Borel 集合 $E \subset \Omega$ ニ對シテ

$$P^{(m+M)}(x, E) - P^{(m+M)}(y, E)$$

$$= \int_{\Omega} \left(P^{(M)}(x, de_z) - P^{(M)}(y, de_z)\right) P^{(m)}(z, E).$$

ヨッテ今 x, y ヲ fix シタトキ $P^{(M)}(x, E) - P^{(M)}(y, E)$ （E ヲ variable ト考ヘル）ガ maximum ニ達スル Borel 集合ヲ ∇ トスレバ[1]

$$P^{(m+M)}(x, E) - P^{(m+M)}(y, E)$$

$$= \int_{\nabla} + \int_{\Omega-\nabla} \left(P^{(M)}(x, de_z) - P^{(M)}(y, de_z)\right) P^{(m)}(z, E)$$

$$\leqq \int_{\nabla} \left(P^{(M)}(x, de_z) - P^{(M)}(y, de_z)\right) \cdot \bar{P}^{(m)}(E)$$

$$+ \int_{\Omega-\nabla} \left(P^{(M)}(x, de_z) - P^{(M)}(y, de_z)\right) p^{(m)}(E)$$

$$= \left(P^{(M)}(x, \nabla) - P^{(M)}(y, \nabla)\right) \cdot \bar{P}^{(m)}(E)$$

$$+ \left(P^{(M)}(x, \Omega-\nabla) - P^{(M)}(y, \Omega-\nabla)\right) p^{(m)}(E)$$

$$= \left(P^{(M)}(x, \nabla) - P^{(M)}(y, \nabla)\right) \left(\bar{P}^{(m)}(E) - p^{(m)}(E)\right)^{(2)}$$

然ルニ

$$P^{(M)}(x, \nabla) - P^{(M)}(y, \nabla)$$

$$= P^{(M)}(x, \nabla) + P^{(M)}(x, \Omega-\nabla) - \left(P^{(M)}(x, \Omega-\nabla) + P^{(M)}(y, \nabla)\right)$$

$$= 1 - \left(P^{(M)}(x, \Omega-\nabla) + P^{(M)}(y, \nabla)\right)$$

---

(1) $P^{(M)}(x, E)$, $P^{(M)}(y, E)$ ハ E ニ関シテ totally additive ナル故 maximum ニ達スル如キ ∇ ハ必ズ存在スル。任意ノ $E \subset \nabla$ ニ對シテ $P^{(M)}(x, E) - P^{(M)}(y, E) \geqq 0$. 又任意ノ $E \subset \Omega - \nabla$ ニ對シテハ $P^{(M)}(x, E) - P^{(M)}(y, E) \leqq 0$.

(2) $P^{(M)}(x, \nabla) - P^{(M)}(y, \nabla) = P^{(M)}(x, \Omega-\nabla) - P^{(M)}(y, \Omega-\nabla)$ ナルコトハ $P^{(M)}(x, \nabla) + P^{(M)}(x, \Omega-\nabla) = P^{(M)}(y, \nabla) + P^{(M)}(y, \Omega-\nabla) = 1$ ナルコトヨリワカル。

ニテ且ツ

$$P^{(M)}(x,\Omega-\nabla)+P^{(M)}(y,\nabla)\geqq\int_{\Omega-\nabla}p^{(M)}(x,z)\,dz+\int_{\nabla}p^{(M)}(y,z)\,dz$$

$$\geqq\int_{(\Omega-\nabla)\cdot B}p^{(M)}(x,z)\,dz+\int_{\nabla\cdot B}p^{(M)}(y,z)\,dz$$

$$\geqq\tau_1\cdot m((\Omega-\nabla)\cdot B)+\tau_1\cdot m(\nabla B)=\tau_1\cdot m(B)>0$$

ナル故

$$P^{(M)}(x,\nabla)-P^{(M)}(y,\nabla)\leqq 1-\tau_1\cdot m(B)=\tau_2<1$$

ヨツテ

$$P^{(m+M)}(x,E)-P^{(m+M)}(y,E)\leqq\tau_2\left(P^{(m)}(E)-p^{(m)}(E)\right)$$

補助定理6ノ証明. 証明ヲ二段ニ分ツ。

第一段. 或ル *positive integer* M, 及ビ或ル *positive number* ρ^* ガ定マツテ任意ノ $x\in\Omega$ ニ對シテ $P(x,A)$, $P^{(2)}(x,A)$, ……, $P^{(M)}(x,A)$ ノウチノ少クトモ一ツガ $\geqq\rho^*$ トナル。

証明: $P^{(m)}(x,A)>0$ トナル如キ x 全体ノ集合ヲ ∇_m トスレバ Ω ガ *final set* デアルコトト $m(A)>0$ ナルコトトヨリ $\Omega=\sum_{m=1}^{\infty}\nabla_m$. ヨツテ十分大キク M_1' ヲ大キクトレバ $m\left(\Omega-\sum_{m=1}^{M_1'}\nabla_m\right)<\frac{\eta}{2}$. ヨツテ更ニ

$P^{(m)}(x,A)>\varepsilon$ トナル如キ x 全体ノ集合ヲ $\nabla_{m,\varepsilon}$ トスレバ

十分小サイ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $m\left(\Omega-\sum_{m=1}^{M_1'}\nabla_{m,\varepsilon}\right)<\eta$. 故ニ最初ノ假定(*)ニヨリ任意ノ $x\in\Omega$ ニ對シテ

$$P^{(N)}\left(x,\Omega-\sum_{m=1}^{M_1'}\nabla_{m,\varepsilon}\right)<1-b \quad \text{又ハ} \quad P^{(N)}\left(x,\sum_{m=1}^{M_1'}\nabla_{m,\varepsilon}\right)>b.$$

ヨッテ少クトモ一ツノ $m\,(1\leqq m\leqq M_1')$ ニ對シテ

$P^{(N)}(x,\nabla_{m,\varepsilon})>\dfrac{b}{M_1'}$。 從ッテ $P^{(N+m)}(x,A)\geqq\displaystyle\int_{\nabla_{m,\varepsilon}}P^{(N)}(x,de_y)P^{(m)}(y,A)\geqq\dfrac{b\varepsilon}{M_1'}$. 故ニ $M_1=N+M_1'$, $\rho^*=\dfrac{b\varepsilon}{M_1'}$ トオケバヨイ。

(第一段終)

<u>第二段</u> 或ル *positive integer* M_2 及ビ或ル *positive number* ρ^{**} ガ定マッテ任意ノ $x\in A$, $y\in B$ 及ビ $M_2\leqq m<M_1+M_2$ ナル任意ノ *integer* m ニ對シテ $p^{(m)}(x,y)\geqq\rho^{**}$ トナル。

<u>證明:</u> d ノ定義ヲ考ヘレバ(前号587頁) d ハアラユル $L\,(\subset B)$ ニ對スル $m=m_1+2N$ 全体(コレヲ $\mathfrak{M}$ トスル)ノ最大公約數デアルカラ $d=1$ ナルコトヨリ、$m_i=m_i'+2N\in\mathfrak{M}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,k)$ ガ存在シテ m_1, $m_2,\cdots\cdots,m_k$ ノ最大公約數ガ 1 トナル。[(3)] 即チ補助定理2ニテ定マッタ *Borel* 集合 B ノ中ニ k 個ノ *Borel* 集

(3) 前ニ $m=m_1+2N$ ト書キ、今度 $m_i=m_i'+2N$ ト書イタノデハ *notation* ノ間ニ統一ガナイ。コレハ前ニ $m=m'+2N$ ト書イテオクベキデシタ。

合 L_i $(i=1,2,\cdots\cdots,k)$ ガ存在シテ[4]、コレ等ハ何レヲ $m(L_i)>0$ デアリ且ツアル m_i', ρ_i', ρ_0 ニ對シテ

$$\begin{cases}\text{任意ノ } x\in L_i \text{ ニ對シテ } P^{(m_i')}(x,A)\geqq \rho_i'>0\\ \text{任意ノ } x\in A,\ y\in L_i \text{ ニ對シテ } p^{(2N)}(x,y)\geqq \rho_0>0\\ \text{任意ノ } x\in A \text{ ニ對シテ}\\ \qquad P^{(2N+m_i')}(x,A)\geqq \rho_0\rho_i'\cdot m(L_i)>0.\end{cases}$$

ガ成立スル。$(i=1,2,\cdots\cdots,k)$

ヨツテ又任意ノ $x\in A$ 及ビ任意ノ $m_i',\cdots\cdots,m_j'$ $(1\leqq i,\cdots\cdots,j\leqq k)$ ニ對シテ

$$P^{(2N+m_i'+2N+\cdots\cdots+2N+m_j')}(x,A)$$
$$\geqq \rho_0\rho_i'\,m(L_i)\cdot\rho_0\cdots\cdots\rho_0\rho_j'\,m(L_j).$$

ガ成立スル。今 $2N+m_i'+2N+\cdots\cdots+2N+m_j'$ $(1\leqq i,\cdots\cdots,j\leqq k)$ ト云フ形ノアラユル integer ヲ考ヘレバ $m_1=2N+m_1'$, $m_2=2N+m_2'$, $\cdots\cdots$, $m_k=2N+m_k'$ ノ最大公約數ガ 1 デアルト云フコトヨリ十分大キイ integer M_2' ガ定マツテ $m\geqq M_2'$ ナル任意ノ integer m ハスベテ $2N+m_i'+2N+\cdots\cdots+2N+m_j'$ $(1\leqq i,\cdots\cdots,j\leqq k)$ ト云フ形ニ表ハサレル。ヨツテカヽル m ニ對シテハ任意ノ $x\in A$ 及ビ $y\in B$ ニ對シテ

$$p^{(m+2N)}(x,y)\geqq\int_A P^{(m)}(x,de_z)\,p^{(2N)}(z,y)$$
$$\geqq \rho_0\rho_i'\,m(L_i)\cdot\rho_0\cdots\cdots\rho_0\rho_j'\,m(L_j)\cdot\rho_0$$

---

(4) L_i ハ互ニ共通點ヲモツテヰルカモシレナイ。シカモ L_i ト L_j $(i\neq j)$ ハ全ク同ジ集合デアルカモ知レナイ。

トナル。

今 $M_2' \leqq m < M_2' + M_1$ ナル integer m ハスベテ $2N + m_i' + 2N + \cdots\cdots + 2N + m_j'$ ト云フ形ニ表ハサレルカラ、$m = M_2', M_2'+1, \cdots\cdots, M_2'+M_1-1$ ニ對スル $\rho_0 \rho_i' m(L_i) \rho_0 \cdots\cdots \rho_0 \rho_j' m(L_j) \rho_0$ 全体（コレハ全体デ M_1 個）ノ minimum ヲ ρ^{**} トスレバ
$M_2' \leqq m < M_2' + M_1$ ナル任意ノ m 及ビ任意ノ $x \in A$, $y \in B$ ニ對シテ

$$p^{(m+2N)}(x, y) \geqq \rho^{**} > 0$$

トナル。ヨッテ $M_2 = M_2' + 2N$ トオケバヨイ。（第二段ノ証明終）