745. Continuous Geometry ニ就テ. III

小平 邦彦 , 古屋 茂 (東大)

§5. $L \cong R_{\gamma_n}$ ノ證明

コノ§デ $L \cong R_{\gamma_n}$ ナルコトノ証明ヲ終ル。既ニ $L(\alpha_i) \cong R_\gamma$ ナルコトハ分ッテキルカラ, m ニ関スル帰納法ニヨッテ順次ニ

$$L(\alpha^m) \cong R_{\gamma_m}$$

ヲ証明スル。

簡単ノタメ

$$R_{\gamma_m} = L^*_m$$

トオク。 $L^*_m = R_{\gamma_m}$ ノ元ハ vector space

$$V_\gamma^m = E_1\gamma + \cdots\cdots + E_m\gamma$$

ノ Teilmodul ニヨッテ現ハサレル。コノトキ

$$\alpha_i^* = (E_i) \qquad c_{ij}^* = (E_i - E_j)$$

トオケバ (α_i^*, c_{ij}^*) ハ L^*_m ノ normalized frame ヲナス。

Lemma. 32. $L_{ij}^* = (b^*;\ b^* \cdot \alpha_j^* = 0,$

$$b^* \cup \alpha_j^* = \alpha_i^* \cup \alpha_j^*).$$

Element b^* ハ, b^* ニヨッテ一意的ニ定マル β ニヨッテ,

$$b^* = (E_i - E_j\beta)$$

ト現ハサレル。 逆ニ $(E_i - E_j\beta)$ ハ L^*_{ij} ニ含マレル。

証明. i) $(E_i - E_j\beta) \subset L^*_{ij}$ ハ明白デアル。

ii) $b^* \subset \mathfrak{a}_i^* \cup \mathfrak{a}_j^* = (E_i, E_j)$ デアルカラ, b^* ハ有限個ノ vector $v_l = E_i \alpha_l + E_j \beta_l$ =ヨツテ $b^* = (v, v_2, \cdots\cdots)$ ノ形ニ現ハサレル。スナハチ b^* ノ vector ハ

$$v = E_i \alpha + E_j \beta, \quad \alpha = \sum_l \alpha_l \xi_l, \ \beta = \sum \beta_l \xi_l$$

ナル形ヲモツ。 I ノ定理2（一次方程式ニ関スル定理）ノ系ニヨレバ、カクノ如キ α, β ハ, γ_2, 及ビ idempotent $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ニヨツテ

$$\alpha = \varepsilon_1 \eta_1$$

$$\beta = \gamma_{21} \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2$$

ト現ハサレル。故ニ $v \subset b^*$ ハ

$$v = (E_i \varepsilon_1 + E_j \gamma_{21}) \eta_1 + E_j \varepsilon_2 \eta_2$$

従ツテ

$$b^* = (E_i \varepsilon_1 + E_j \gamma_{21}, \quad E_j \varepsilon_2)$$

然ルニ $b^* \mathfrak{a}_j^* = 0$ デアルカラ $(E_j \varepsilon_2) - 0$.

故ニ $\varepsilon_2 = 0$.

又 $b^* \cup \mathfrak{a}_j^* = \mathfrak{a}_i^* \cup \mathfrak{a}_j^*$ デアルカラ,

$$\mathfrak{a}_i^* = \mathfrak{a}_i^* (b^* \cup \mathfrak{a}_j^*) = (E_i \varepsilon_1)$$

故ニ

$$(\varepsilon_1) = 1$$

故ニ $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$ デアルカラ $\varepsilon_1 = 1$ トナル。ソコデ $\gamma_{21} = -\beta$ ト書ケバ

$$b^* = (E_i - E_j \beta).$$

β ガ一意的ニ定マルコトハ簡単ニ確メラレル。（証明終）

normalized frame $(\alpha_i^*, \tau_{ij}^*)$ ニ關シテ作ッタ L-number ノ Ring ヲ γ^*, ソノ元ヲ β^* トスレバ，上ノ Lemma ニヨリ

$$(\beta^*)_{ij} = (E_i - E_j\,\beta)$$

ナル對應ニヨッテ β^* ト β ガ一對一ニ對應シ，更ニコノ對應ニヨッテ γ^* ト γ ガ ring-isomorph トナル。何トナレバ：

$$(\beta^*)_{ij} = (E_i - E_j\,\beta) \qquad (\gamma^*)_{ij} = (E_i - E_j\,\gamma)$$

ナルトキ

$$\begin{aligned}
&(\beta^* + \gamma^*)_{ij} \\
&= \Big(\big((\beta^*)_{ij} \cup \tau_{ik}^*\big)(\alpha_j^* \cup \alpha_k^*) \cup \big((\gamma)_{ij}^* \cup \alpha_k^*\big)(\alpha_j^* \cup \tau_{ik}^*)\Big)(\alpha_i^* \cup \alpha_j^*) \\
&= \Big((E_i - E_j\,\beta,\ E_i - E_k)(E_j,\ E_k) \cup (E_i - E_j\,\gamma,\ E_k)(E_j,\ E_i - E_k)\Big)(E_i, E_j) \\
&= (E_j\,\beta - E_k,\ E_i - E_j\,\gamma - E_k)(E_i, E_j) = \big(E_i - E_j\,(\beta + \gamma)\big).
\end{aligned}$$

又 $(\beta^*)_{ij} = (E_i - E_j\,\beta)$, $(\gamma^*)_{jk} = (E_j - E_k\,\gamma)$ ナルトキ

$$\begin{aligned}
(\gamma^* \beta^*)_{ik} &= \big((\beta^*)_{ij} \cup (\gamma^*)_{jk}\big)(\alpha_i^* \cup \alpha_k^*) \\
&= (E_i - E_j\,\beta,\ E_j - E_k\,\gamma)(E_i,\ E_k) \\
&= (E_i - E_k\,\gamma\beta).
\end{aligned}$$

ソコデ $\gamma^* \cong \gamma$ ニヨッテ對應スル β^* ト β ヲ等シイモノト考ヘテ

$$\beta^* = \beta,$$

從ッテ $\gamma^* = \gamma$

トオク。コノトキ L_m^* ニ於テ $(\alpha_i^*, \tau_{ij}^*)$ ナル normalized frame ニ關シテ作ッタ $(\beta^*)_{ij}$, $(\beta^*)_j$，及ビ

$(\beta^*;\ \gamma^{*1}\gamma^{*2}\cdots\cdots\gamma^{*m-1})$ ヲ L ニ於ケル $(\beta)_{ij}$, $(\beta)_j$, 等ト區別スルタメニ

$$(\beta^*)_{ij} = (\beta^*)_{ij}^* = (\beta)_{ij}^*$$

$$(\beta^*)_j = (\beta^*)_j^* = (\beta)_j^*$$

$$(\beta^*;\ \gamma^{*1}\cdots\cdots\gamma^{*m-1}) = (\beta^*;\ \gamma^{*1}\cdots\cdots\gamma^{*m-1})^*$$
$$= (\beta;\ \gamma^1\cdots\cdots\gamma^{m-1})^*$$

ト書クコトニスル。スナハチ

$$(\beta)_{ij}^* = (E_i - E_j\beta)$$

$$(\beta)_j^* = (E_j\beta)$$

及ビ

$$(\beta;\gamma^1\cdots\cdots\gamma^{m-1})^* = \left(\alpha^{*m-1}\cup(E_m\beta)\right)\prod_{j=1}^{m-1}\left(\alpha_j^{*m-1}\cup(E_m - E_j\gamma^j)\right).$$

$L_1^* = R_\gamma$ ト $L(\alpha^1)$ ノ間ノ *isomorphism* ハ

$$(\beta)_1^* \longleftrightarrow (\beta)_1$$

ナル對應ニヨツテ與ヘラレタ。ソコデ一般ニ $R\gamma_h$ ト $L(\alpha^h)$ ノ間ニ

$$(\beta)_j^* \longleftrightarrow (\beta)_j \qquad j, k \leqq h$$
$$(\gamma)_{jk}^* \longleftrightarrow (\gamma)_{jk}$$

ナル對應ヲ與ヘル *isomorphism* ヲ考ヘ，コレヲ $\mathfrak{F}^h$ デ現ハス。$\mathfrak{F}^1$ ガ存在スルコトハ既ニ證明サレテヰル。ソコデ $\mathfrak{F}^{m-1}$ ガ存在スルコトヲ假定シテ、コレヲ延長シテ $\mathfrak{F}^m$ ヲ構成スルコトヲ試ミル。コレガ出來レバ，歸納法ニヨツテ

$\mathfrak{S}^n$ ノ存在, スナハチ $R_{\gamma_n} \cong L$ ガ証明サレル。

コゝデ便宜上 $\mathfrak{S}^h$ ニヨッテ $\mathfrak{u} \leqq L(\mathfrak{a}^h)$ ニ對應スル $L^*_h = R_{\gamma_h}$ ノ元ヲ $\mathfrak{S}^h\mathfrak{u}$ デ現ハスコトニスル。

$\mathfrak{u} \leqq \mathfrak{a}^m$ ハ定理3ノ系及ビ定義15ニヨッテ

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{u}\,\mathfrak{a}^{m-1} \smile (\beta;\, \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1})$$

ト現ハサレル。コノ現ハシ方ハ勿論一意的デハナイケレドモ, $\mathfrak{S}^{(m)}(\beta_j) = (\beta)^*_j$, $\mathfrak{S}^m(\gamma)_{jh} = (\gamma)^*_{jh}$, 又 $\mathfrak{S}^m$ ハ $\mathfrak{S}^{m-1}$ ノ延長デアル筈デアルカラ, $\mathfrak{S}^m\mathfrak{u}$ ハ

$$(\mathrm{II}) \qquad \mathfrak{S}^m\mathfrak{u} = \mathfrak{S}^{m-1}\mathfrak{u}\,\mathfrak{a}^{m-1} \smile (\beta;\, \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1})^*$$

デナケレバナラナイ。

ソコデ吾々ハ逆ニ, (II) ニヨッテ $\mathfrak{S}^m$ ヲ定義シ, カク定義サレタ $\mathfrak{S}^m$ ガ $\mathfrak{u}$ ノ現ハシ方ニ関セズ一意的ニ定マッテ, $L(\mathfrak{a}^m)$ ト L^*_m ノ間ノ *isomorphismus* ヲ與ヘルコトヲ証明スル. コノタメニハ

スナハチ, 次ノ関係 (III) ガ成立ツコトヲ言ヘバヨイ。

(III) $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \leqq \mathfrak{a}^{m-1}$ ナルトキ,

$$\mathfrak{u} \smile (\beta;\, \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \leqq \mathfrak{v} \smile (\delta;\, \eta^1 \cdots\cdots \eta^{m-1})$$

ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ

$$\mathfrak{S}^{m-1}\mathfrak{u} \smile (\beta;\, \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1})^* \leqq \mathfrak{S}^{m-1}\mathfrak{v} \smile (\delta;\, \eta^1 \cdots\cdots \eta^{m-1})^*$$

デアル。

然ルニ, 次ノ Lemma 33 ニヨレバ,

$$\mathfrak{u} \smile (\beta;\, \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \leqq \mathfrak{v} \smile (\delta;\, \eta^1 \cdots\cdots \eta^{m-1})$$

ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ, $\mathfrak{u} \leqq \mathfrak{v}$, $(\beta)_\gamma \leqq (\delta)_\gamma$, 且ツ $\mathfrak{a}^{m-1}((\beta;\, \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \smile (1;\, \eta^1 \cdots\cdots \eta^{m-1})) \leqq \mathfrak{v}$

が成立スルコトデアル。

$\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}$ ト $\mathfrak{S}^{m-1}\mathfrak{a} \cong \mathfrak{S}^{m-1}\mathfrak{b}$ ハ同値デアルカラ，(III) ヲ証明スルニハ

(IV) $\quad \alpha^{m-1}((\beta;\gamma^1\cdots\cdots\gamma^{m-1})\cup(1;\eta^1\cdots\cdots\eta^{m-1}))\cong\mathfrak{b}$

ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ，

$$\alpha^{*m-1}((\beta;\gamma^1\cdots\cdots\gamma^{m-1})^*\cup(1;\eta^1\cdots\cdots\eta^{m-1})^*)\cong\mathfrak{S}^{m-1}\mathfrak{b}$$

ナルコトヲ示セバヨイ。

然ルニ，後デ証明スル如ク

(V) $\quad \alpha^{m-1}((\beta;\gamma^1\cdots\cdots\gamma^{m-1})\cup(1;\eta^1\cdots\cdots\eta^{m-1}))$

$$=\alpha^{m-1}((\beta;\gamma^1-\eta^1\cdots\cdots\gamma^{m-1}-\eta^{m-1})\cup\alpha_m)$$

が成立スル。定理7ニヨレバ，(V)ノ右辺ハ $\beta, \gamma^1-\eta^1, \cdots\cdots \gamma^{m-1}-\eta^{m-1}$ ニヨッテ定マル γ ノ元 $\bar{\beta}$, η^i, ε^i ニヨッテ

$$\left(\alpha_1^{m-1}\cup((\gamma^1-\eta^1)\bar{\beta})_1\right)\prod_{i=2}^{m-1}\left(\alpha_1^{m-1}\cup(-\eta^i)_{1i}\right)\cup\alpha_1^{m-1}\left(\prod_{i=2}^{m-1}\left(\alpha_1^{m-1}\cup(\varepsilon^i)_{1i}\right)\cup\alpha_1\right)$$

ト現ハサレル。コノ式ニ現ハレル元ハ、スベテ α^{m-1} ニ含マレル。従ッテコレハ $\mathfrak{S}^{m-1}$ ニヨッテ

$$\left(\alpha_1^{*m-1}\cup((\gamma^1-\eta^1)\bar{\beta})_1^*\right)\prod_{i=2}^{m-1}\left(\alpha_1^{*m-1}\cup(-\eta^i)_{1i}^*\right)$$

$$\cup\,\alpha_1^{*m-1}\left(\prod_{i=2}^{m-1}\left(\alpha_1^{*m-1}\cup(\varepsilon^i)_{1i}^*\right)\cup\alpha_1^*\right)$$

トナル。コレハ $\alpha^{*m-1}((\beta;\gamma^1\cdots\cdots\gamma^{m-1})^*\cup(1;\eta^1\cdots\eta^{m-1})^*)$ ニ等シイ。故ニ(IV)が成立スル。従ッテ $\mathfrak{S}^m$ が必要ナ isomorphism ヲ與ヘルコトが分ル。

コレデ我々ノ問題ハ Lemma 33 及ビ (∇) ノ証明ニ帰着シタ。

Lemma 33. $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \leqq \mathfrak{a}^{m-1}$ ナルトキ

$$\mathfrak{u} \cup (\beta; \gamma^1, \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \leqq \mathfrak{v} \cup (\delta; \eta^1, \cdots\cdots, \eta^{m-1})$$

ナルタメノ必要且充分ナル條件ハ

i) $\mathfrak{u} \leqq \mathfrak{v}$

ii) $(\beta)_r \leqq (\delta)_r$

iii) $\mathfrak{a}^{m-1}((\beta; \gamma^1, \cdots\cdots, \gamma^{m-1}) \cup (1; \eta^1, \cdots\cdots, \eta^{m-1})) \leqq \mathfrak{v}$

証明 I. 必要ナルコト。

$\mathfrak{u} \cup (\beta; \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \leqq \mathfrak{v} \cup (\delta; \eta^1 \cdots\cdots \eta^{m-1})$ ノ両辺ニ $\mathfrak{a}^{m-1}$ ヲカケレバ i) ガ出ル; 両辺ニ $\mathfrak{a}^{m-1}$ ヲ加ヘレバ

$$\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\beta)_m) \prod_{i=1}^{m-1} (\mathfrak{a}_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{m_i})$$

$$\leqq \mathfrak{a}^{m-1} \cup (\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\delta)_m) \prod_{i=1}^{m-1} (\mathfrak{a}_i^{m-1} \cup (\eta^i)_{m_i}),$$

即チ $$(\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\beta)_m)(\mathfrak{a}^{m-1} \cup \prod_{i=1}^{m-1} (\mathfrak{a}_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{m_i}))$$

$$\leqq (\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\delta)_m)(\mathfrak{a}^{m-1} \cup \prod_{i=1}^{m-1} (\mathfrak{a}_i^{m-1} \cup (\eta^i)_{m_i})).$$

然ルニ $\mathfrak{a}^{m-1} \cup \prod_{i=1}^{m-1} (\mathfrak{a}_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{m_i}) = \mathfrak{a}^{m-1} \cup \prod_{i=1}^{m-1} (\mathfrak{a}_i^{m-1} \cup (\eta^i)_{m_i}) = \mathfrak{a}^m$ ナル故 $(\beta)_m \leqq (\delta)_m$ ガ成立シ, 定理 6 ニヨッテ $(\beta)_r \leqq (\delta)_r$ トナル。

iii) ヲ出スニハ $\mathfrak{u} \cup (\beta; \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \cup (1; \eta^1 \cdots\cdots \eta^{m-1}) \leqq \mathfrak{v} \cup (1; \eta^1 \cdots\cdots \eta^{m-1})$ ノ両辺ニ $\mathfrak{a}^{m-1}$ ヲカケレバ

ヨイ。

II. 充分ナルコト,

$\mathfrak{a} \cup (\delta ; \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1})$

$\geqq \mathfrak{a}^{m-1}((\beta ; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \cup (1 ; \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1})) \cup (\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\delta)_m)(1 ;$
$\eta' \cdots\cdots \eta^{m-1}) \cup \mathfrak{u}$

$= (\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\delta)_m)((\beta ; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \cup (1 ; \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1})) \cup \mathfrak{u}$

$\geqq (\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\delta)_m)(\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\beta)_m)(1 ; \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1}) \cup \mathfrak{u}$

$= \mathfrak{u} \cup (\beta ; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1})$ q. e. d.

次ニ $m < n$ ナル場合ノ(V)ノ式ヲ証明スル。

最初ニ, 次ノ三個ノ perspectivity ヲ考ヘル。

$$(\mathfrak{a}_1 \cdots\cdots \mathfrak{a}_i \cdots\cdots \mathfrak{a}_m) \underset{\mathfrak{c}_{in}}{\frown} (\mathfrak{a}_1 \cdots\cdots \overset{i}{\mathfrak{a}_n} \cdots\cdots \mathfrak{a}_m)$$

$$\underset{\mathfrak{a}_i}{\frown} (\mathfrak{a}_1 \cdots\cdots \mathfrak{a}_n \cdots\cdots (\gamma)_{mi}) \underset{\mathfrak{c}_{in}}{\frown} (\mathfrak{a}_1 \cdots\cdots \mathfrak{a}_i \cdots\cdots (\gamma)_{mi})$$

コレラノ perspectivity ヲ上ノ順序デ夫々 P, Q, R ト表ハセバ, $W_i(\gamma) = PQR$ ハ $L(\mathfrak{a}^m)$ ノ projective automorphism デアッテ, 次ノ三ツノ性質ヲ有スル. 即チ

1) $\mathfrak{u} \leqq \mathfrak{a}^{m-1}$ ナラバ $\mathfrak{u} W_i(\gamma) = \mathfrak{u}$

2) $\mathfrak{a}_i \leqq \mathfrak{u} \leqq \mathfrak{a}^m$ ナラバ $\mathfrak{u} W_i(\gamma) = \mathfrak{u}$

3) $(\delta)_{mi} W_i(\gamma) = (\delta + \gamma)_{mi}$

証明ハ: 1) $\mathfrak{u} P = (\mathfrak{u} \cup \mathfrak{c}_{in})(\mathfrak{a}_i^m \cup \mathfrak{a}_n)$. シカルニ $(\mathfrak{a}^{m-1} \cup \mathfrak{c}_{in})(\mathfrak{a}_i^m \cup \mathfrak{a}_n) = \mathfrak{a}_i^{m-1} \cup \mathfrak{a}_n$ 及ビ $(\mathfrak{a}^{m-1} \cup \mathfrak{a}_n)(\mathfrak{a}_i^{m-1} \cup \mathfrak{a}_n \cup (\gamma)_{mi}) = \mathfrak{a}_i^{m-1} \cup \mathfrak{a}_n$ デ

アルカラ，　$\mathfrak{u}PQ=\mathfrak{u}P$.

從ツテ　$\mathfrak{u}W_i(\gamma)=\mathfrak{u}PR=(\mathfrak{u}\cup\mathfrak{c}_{in})\mathfrak{a}^m=\mathfrak{u}$

2)　$\mathfrak{u}\cup\mathfrak{a}_n\cup\mathfrak{a}_i=\mathfrak{u}W_i(\gamma)\cup\mathfrak{a}_n\cup\mathfrak{a}_i$，

$\mathfrak{a}^m\geqq\mathfrak{u}W_i(\gamma)\geqq\mathfrak{a}_i$ ナル故 $\mathfrak{u}\cup\mathfrak{a}_n=\mathfrak{u}W_i(\gamma)\cup\mathfrak{a}_n$.

コヽガ両辺ニ $\mathfrak{a}^m$ ヲカケレバヨイ。

3)　$(\delta)_{mi}W_i(\gamma)$ ヲカキ下セバ

$$\Big(\big(((\delta)_{mi}\cup\mathfrak{c}_{in})(\mathfrak{c}_m\cup\mathfrak{a}_n)\cup\mathfrak{a}_i\big)(\mathfrak{a}_n\cup(\gamma)_{mi})\cup\mathfrak{c}_{in}\Big)(\mathfrak{a}_i\cup\mathfrak{a}_m)$$

$$=\big(((\delta)_{mn}\cup\mathfrak{a}_i)(\mathfrak{a}_n\cup(\gamma)_{mi})\cup\mathfrak{c}_{in}\big)(\mathfrak{a}_i\cup\mathfrak{a}_m)$$

故ニ Lemma 19 ニヨリ $(\delta)_{mi}W_i(\gamma)=(\delta+\gamma)_{mi}$ トナルコトガ分ッタ。

ソコデ　$X=W_1(-\eta^1)\cdot W_2(-\eta^2)\cdot\cdots\cdots\cdot W_{m-1}(-\eta^{m-1})$

トオケバ

$$\mathfrak{a}^{m-1}\big((\beta;\gamma^1\cdots\cdots\gamma^{m-1})\cup(1;\eta^1\cdots\cdots\eta^{m-1})\big)$$

$$=\big[\mathfrak{a}^{m-1}((\beta;\gamma^1\cdots\cdots\gamma^{m-1})\cup(1;\eta^1\cdots\cdots\eta^{m-1}))\big]X$$

$$=\mathfrak{a}^{m-1}X\big((\beta;\gamma^1\cdots\cdots\gamma^{m-1})X\cup(1;\eta^1\cdots\cdots\eta^{m-1})X\big)$$

$$=\mathfrak{a}^{m-1}\big((\beta;\gamma^1-\eta^1,\cdots\cdots,\gamma^{m-1}-\eta^{m-1})\cup\mathfrak{a}_m\big)$$

コレデ $m<n$ ナル場合ノ (V) ノ証明ハ終ッタガ、一般ノ場合デ (V) ヲ証明スルニハ、尚二三ノ Lemma ヲ必要トスル。

Lemma 34.　m_1^*，$m_2^*\in R_{\gamma_n}$ トスルトキ

$m_1^*\cup(\gamma)_{ij}^*=m_2^*\cup(\gamma)_{ij}^*$ ガ凡ベテノ $\gamma\in\Upsilon$

及ビ $1\leqq i$，$j\leqq n$ ニツイテ成立スレバ

$$m_1^*=m_2^*$$

証明 I. Lemma 5 ニヨッテ, m_i^* ハ

$$A_i=\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(i)} & & & 0 \\ \gamma_{21}^{(i)} & \varepsilon_2^{(i)} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \gamma_{n1}^{(i)} & \cdots & \gamma_{n,n-1}^{(i)} & \varepsilon_n^{(i)} \end{pmatrix}$$ ニヨッテ $m_i^*=(A_i)_\gamma$ ト

カヽレル. ($i=1,2$)

但シ $\gamma_{jk}^{(i)}\varepsilon_k^{(i)}=\gamma_{jk}^{(i)}$, $\varepsilon_j^{(i)}\gamma_{jk}^{(i)}=0$, $(\varepsilon_j^{(i)})^2=\varepsilon_j^{(i)}$

デアル。

コノトキ $(n-1)$ 次ノ Matrix C_i, D_i $(i=1,2)$ ヲ

$$C_i=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \gamma_{21}^{(i)} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \gamma_{n-1,1}^{(i)} & \cdots & \gamma_{n-1,n-2}^{(i)} & 1 \end{pmatrix},\quad D_i=\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(i)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{n-1}^{(i)} \end{pmatrix}$$

トオケバ $\mathfrak{a}^{n-1}(m_i^* \cup \mathfrak{a}_n)=(C_iD_i)_\gamma$ トナル。従ッテ

$(C_1D_1)_\gamma=(C_2D_2)_\gamma$ 即チ, $C_1D_1X_1=C_2D_2$,

$C_2D_2X_2=C_1D_1$ トカクコトガ出来ル。

シカルニ $$\overline{C}_i=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -\gamma_{21}^{(i)} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\gamma_{n-1,1}^{(i)} & \cdots & -\gamma_{n-1,n-2}^{(i)} & 1 \end{pmatrix}$$ トスレバ,

$\overline{C}_iC_i=C_i\overline{C}_i=1$ デアルカラ, $D_1=D_1X_1X_2$,

$D_2=D_2X_2X_1$ トナル。ソコデ

$P=\begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_n^{(2)} \end{pmatrix}$ 及ビ $Q=\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_n^{(2)} \end{pmatrix}$ ニヨッテ P, Q ヲキメ

レバ $A_2 P = \begin{pmatrix} C_1 D_1 & 0 \\ B^{(2)} & \varepsilon_n^{(2)} \end{pmatrix}$ トナリ、更ニ $A_2 P Q = A_2$, 従ッテ $m_2^* = (A_2)_r = (A_2 P)_r$ ガ成立スル。ソレ故

$A_i = \begin{pmatrix} C_1 D_1 & 0 \\ B^{(i)} & \varepsilon_n^{(i)} \end{pmatrix}$, $B^{(i)} = (\beta_1^{(i)}, \ldots\ldots, \beta_{n-1}^{(i)})$ トカクコトガ出来ル。便宜上 $1 \leqq j \leqq n-1$ ナルトキ $\varepsilon_j^{(i)} = \varepsilon_j$ トオケバ $\beta_j^{(i)} \varepsilon_j = \beta_j^{(i)}$, $e_n^{(i)} \beta_j^{(i)} = 0$ トナル。

又 $r_{ik}^{(1)} = r_{ik}$ $(1 \leqq i \leqq n-2,\ 1 \leqq k \leqq n-2)$ トカクコトニスル。

次ニ $m_i^* \cup (r)_{hn}^*$ ヲ vector set $\overline{V}_i$ デアラハセバ、$\overline{V}_i$ ハ $\overline{V}_i = \sum_{l=1}^{n} E_l \bar{\alpha}_l^{(i)}$ トシテ、次ノ様ニカキアラハサレル。

$$\bar{\alpha}_l^{(i)} = \sum_{j=1}^{l-1} r_{lj} \xi_j + \varepsilon_l \xi_l \quad ; \quad l \neq h,\ l \neq n$$

$$\bar{\alpha}_h^{(i)} = \sum_{j=1}^{h-1} r_{hj} \xi_j + \varepsilon_h \xi_h + \xi$$

$$\bar{\alpha}_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j^{(i)} \xi_j + \varepsilon_n^{(i)} \xi_n - r\xi$$

今 $\vartheta_h = \sum_{l=h+1}^{n-1} (1-\varepsilon_l)_l \cup \alpha_n$ トシテ、$(m_i^* \cup (r)_{hn}^*) \vartheta_h$ ヲ vector set $V_i = \sum_{l=1}^{n} E_l \alpha_l^{(i)}$ デアラハシテミレバ

$$\alpha_j^{(i)} = 0, \quad 1 \leqq j \leqq h$$

$$\alpha_j^{(i)} = \gamma_{jk}\xi_k, \quad k+1 \leqq j \leqq n-1$$
$$\alpha_n^{(i)} = (\beta_k^{(i)} + \gamma\varepsilon_k)\xi + \varepsilon_n^{(i)}\eta$$

コノトキ假定ニヨッテ $(\beta_k^{(1)} + \gamma\varepsilon_k, \varepsilon_n^{(1)}) = (\beta_k^{(2)} + \gamma\varepsilon_k, \varepsilon_n^{(2)})$ デアルカラ, $\gamma = -\beta_k^{(i)}$ $(i=1, 2)$ トオケバ合ルヤウニ $(\varepsilon_n^{(1)})_r = (\varepsilon_n^{(2)})_r$ トナッテ之ヲ $(\varepsilon_n)_r$ トカケバ $\beta_k^{(2)} - \beta_k^{(1)} = \varepsilon_n\delta_k$ トナル。

故ニ $\left(\sum_{k=1}^{m-1} \beta_k^{(1)}\xi_k + e_n^{(1)}\xi\right)$ ノ全体ト $\left(\sum_{k=1}^{m-1} \beta_k^{(2)}\xi_k + e_n^{(2)}\xi\right)$ ノ全体トガ一致スル。即チ $m_1^* = m_2^*$

定義 16.

$$\begin{pmatrix} \beta; & \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1} \\ j_m & j_1 \cdots\cdots j_{m-1} \end{pmatrix} = (\beta; \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1}) P \begin{pmatrix} m, & 1, \cdots\cdots, m-1 \\ j_m, & j_1, \cdots\cdots, j_{m-1} \end{pmatrix}$$

Lemma 35. $\mathfrak{a}^{k-2} \cup \mathfrak{a}_k \underset{\mathfrak{a}_{k-1}}{\sim} \mathfrak{a}^{k-2} \cup (\gamma)_{k,k-1}$ ナル perspective ニヨッテ

$$\begin{pmatrix} \beta; & \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{k-2} \\ k & 1 \cdots\cdots k-2 \end{pmatrix} \underset{\mathfrak{a}_{k-1}}{\sim} (\beta; \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{k-2}\, \gamma)$$

証明 $$\left(\begin{pmatrix} \beta; & \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{k-2} \\ k & 1 \cdots\cdots k-2 \end{pmatrix} \cup \mathfrak{a}_{k-1}\right)\left(\mathfrak{a}^{k-2} \cup (\gamma)_{k,k-1}\right)$$

$$= \left(\left(\mathfrak{a}^{k-2} \cup (\beta)_k\right)\prod_{j=1}^{k-2}\left(\mathfrak{a}_j^{k-2} \cup (\gamma^j)_{kj}\right) \cup \mathfrak{a}_{k-1}\right)\left(\mathfrak{a}^{k-2} \cup (\gamma)_{k,k-1}\right)$$

$$= \left(\mathfrak{a}^{k-1} \cup (\beta)_k\right)\prod_{j=1}^{k-2}\left(\mathfrak{a}_j^{k-1} \cup (\gamma^j)_{kj}\right) \cdot \left(\mathfrak{a}^{k-2} \cup (\gamma)_{k,k-1}\right)$$

$$= (\beta; \gamma^1, \cdots\cdots, \gamma^{k-2}, \gamma)$$

Lemma 36. $\begin{pmatrix} 1; & \gamma^j+\gamma\gamma^k \\ i, & j \end{pmatrix} \cup (\gamma)_{kj} = \begin{pmatrix} 1; & \gamma^j & \gamma^k \\ i & j & k \end{pmatrix} \cup (\gamma)_{kj}$

証明：$\begin{pmatrix} 1; & \gamma^j & \gamma^k \\ i & j & k \end{pmatrix} = \left((\gamma^j)_{ij} \cup \alpha_k\right)\left((\gamma^k)_{ik} \cup \alpha_j\right)$ 及ビ

Lemma 19 ニヨッテ。

$$(\alpha_i, (\gamma^k)_{ik}, \alpha^k) \widetilde{\alpha_j} \left((\gamma^j)_{ij}, \begin{pmatrix} 1; \gamma^j, & \gamma^k \\ i, \ j & k \end{pmatrix}, \alpha_k\right)$$

$$\widetilde{\alpha_j} \left((\gamma^j+\gamma\gamma^k)_{ij}, \begin{pmatrix} 1; & \gamma^j, & \gamma^k \\ 1 & j & k \end{pmatrix}, (\gamma)_{kj}\right)$$

トナルコトガ分ル. シカルニ

$$(\gamma^j+\gamma\gamma^k)_{ij} - \begin{pmatrix} 1; & \gamma^j+\gamma\gamma^k \\ i & j \end{pmatrix}$$

デアルカラ $\begin{pmatrix} 1; & \gamma^j+\gamma\gamma^k \\ i & j \end{pmatrix} \cup (\gamma)_{kj} - \begin{pmatrix} 1; & \gamma^j & \gamma^k \\ i & j & k \end{pmatrix} \cup (\gamma)_{kj}$

Lemma 37. $j < k < h$ トスルトキ

$$(1;\ \gamma^1 \cdots\cdots, \gamma^j+\gamma\gamma^k, \cdots\cdots \overset{k}{\vee} \cdots\cdots \gamma^{h-1}) \cup (\gamma)_{hj}$$

$= (1;\ \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^j \cdots\cdots \gamma^k \cdots\cdots \gamma^{h-1}) \cup (\gamma)_{hj}$ 但シ上式ノ

左辺ハ $\left(\alpha_j^{h-1} \cup (\gamma^j+\gamma\gamma^k)_{hj}\right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{h-1} \left(\alpha_i^{h-1} \cup (\gamma^i)_{hi}\right)$ ヲ表ハス.

証明ハ h ニ関スル帰納法ニヨル。

$h=2$ ノ場合ハ Lemma 36 デアル。$h-1$ ノトキ証明サレタト仮定スル. 即チ,

$$(1;\ \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^j+\gamma\gamma^k \cdots\cdots \overset{k}{\vee} \cdots\cdots \gamma^{h-2}) \cup (\gamma)_{hj}$$

$$= (1;\ \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^j \cdots\cdots \gamma^k \cdots\cdots \gamma^{h-2}) \cup (\gamma)_{hj}$$

之レヲ $\mathfrak{a}^{k-2} \smile \mathfrak{a}_k\ \widehat{\mathfrak{a}_{k-1}}\ \mathfrak{a}^{k-2} \smile (\gamma^{k-1})_{k,k-1}$ ニヨツテ移セバ

Lemma 35 ニヨツテ

$$(1;\gamma^1\cdots\gamma^j+\gamma\gamma^k\cdots\overset{k}{\vee}\cdots\gamma^{k-2}\gamma^{k-1})\smile(\gamma)_{kj}$$
$$=(1;\gamma^1\cdots\gamma^j\cdots\gamma^k\cdots\gamma^{k-2}\gamma^{k-1})\smile(\gamma)_{kj}$$ ト

ナル。

最後ニ $m=n$ ナル場合ノ (∇) ノ式：

$$(\nabla_n)\quad \mathfrak{a}^{n-1}((\beta;\gamma^1\cdots\gamma^{n-1})\smile(1;\eta^1\cdots\eta^{n-1}))$$
$$=\mathfrak{a}^{n-1}((\beta;\gamma^1-\eta^1,\cdots\gamma^{n-1}-\eta^{n-1})\smile\mathfrak{a}_n)$$

ノ証明ヲ述ベル。(∇_n) ノ両辺ハ $\mathfrak{a}^{n-1}$ ニ含マレテヰル。然ルニ $m<n$ ナル m ニ関シテハ既ニ (∇) ガ証明サレ，従ツテ $L(\mathfrak{a}^m)\cong R_{\gamma_m}$，特ニ $L(\mathfrak{a}^{n-1})\cong R_{\gamma_{n-1}}$ ナルコトガ分ツテヰルカラ，(∇_n) ヲ証明スルタメニ Lemma 34 ヲ利用スルコトガ出来ル：$k,j\leqq n-1$ ニツイテ，

$$\mathfrak{a}^{n-1}((\beta;\gamma^1\cdots\gamma^{n-1})\smile(1;\eta^1\cdots\eta^{n-1}))\smile(\gamma)_{kj}$$
$$=\mathfrak{a}^{n-1}((\mathfrak{a}^{n-1}\smile(\beta)_n)(1;\gamma^1\cdots\gamma^{n-1})\smile(1;\eta^1\cdots\eta^{n-1})\smile(\gamma)_{kj})$$
$$=\mathfrak{a}^{n-1}((\mathfrak{a}^{n-1}\smile(\beta)_n)((1;\gamma^1\cdots\gamma^{n-1})\smile(\gamma)_{kj})\smile(1;\eta^1\cdots\eta^{n-1})\smile(\gamma)_{kj})$$

コヽデ Lemma 27 ヲ利用スレバ

$$=\mathfrak{a}^{n-1}((\mathfrak{a}^{n-1}\smile(\beta)_n)((1;\gamma^1\cdots\gamma^j+\gamma\gamma^k\cdots\overset{k}{\vee}\cdots\gamma^{n-1})\smile(\gamma)_{kj})$$
$$\smile(1;\eta^1\cdots\eta^j+\gamma\eta^k\cdots\overset{k}{\vee}\cdots\eta^{n-1})\smile(\gamma)_{kj})$$
$$=\mathfrak{a}^{n-1}((\beta;\gamma^1\cdots\gamma^j+\gamma\gamma^k\cdots\overset{k}{\vee}\cdots\gamma^{n-1})$$
$$\smile(1;\eta^1\cdots\eta^j+\gamma\eta^k\cdots\overset{k}{\vee}\cdots\eta^{n-1})\smile(\gamma)_{kj})$$

コヽデ k ナル Index ノ所ガ抜ケテヰル。

従ツテ

$$= \alpha^{n-1}_{k}((\beta;\ \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^j + \gamma\gamma^k \cdots\cdots \overset{k}{\vee} \cdots\cdots \gamma^{n-1})$$

$$\cup (1;\ \eta^1 \cdots\cdots \eta^j + \gamma\eta^k \cdots \overset{k}{\vee} \cdots \eta^{n-1})) \cup (\gamma)_{kj}$$

コノ第一項ハ $m=n-1$ ナル場合ノ (V) ノ左辺デアルカラ,

$$= \alpha^{n-1}_{k}((\beta;\ \gamma^1-\eta^1, \cdots\cdots (\gamma^j-\eta^j)+\gamma(\gamma^k-\eta^k), \cdots$$

$$\cdots \overset{k}{\vee} \cdots \gamma^{n-1}-\eta^{n-1}) \cup \alpha_n) \cup (\gamma)_{kj}$$

$$= \alpha^{n-1}((\beta;\ \gamma^1-\eta^1, \cdots\cdots (\gamma^j-\eta^j)+\gamma(\gamma^k-\eta^k) \cdots\cdots$$

$$\cdots \overset{k}{\vee} \cdots \gamma^{n-1}-\eta^{n-1}) \cup (\gamma)_{kj} \cup \alpha_n)$$

$$= \alpha^{n-1}((\beta;\ \gamma^1-\eta^1 \cdots\cdots \gamma^j-\eta^j \cdots\cdots \gamma^k-\eta^k \cdots\cdots \gamma^{n-1}-\eta^{n-1}) \cup \alpha_n)$$

コレデ (V_n) ガ証明サレタ。

コレデ次ノ「Hauptsatz」ノ証明ガ終ッタ。

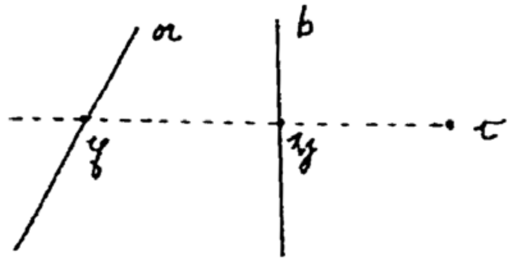
Hauptsatz:

L ヲ order $n \geqq 4$ ナル complemented modular lattice トスル。L ノ normalized frame ヲ定メ，ソノ L-number ノ作ル ring ヲ γ トスレバ L ト R_{γ_n} トハ lattice isomorph トナル。

$\boxed{\text{注意}}$ L ガ射影空間ナル場合ヲ藉リテ式ノ意味ヲ説明スル。

1) a, b, etc. ハ点，直線，平面等ヲ現ハシ，$a b$ ハ a ト b ノ交ハリ，$a \cup b$ ハ a ト b ニヨッテ定メラレル "平面" ヲ現ハス。

2) a, b ヲ直線，$\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{c}$ ヲ点トシテ圖ヲ書ケバ

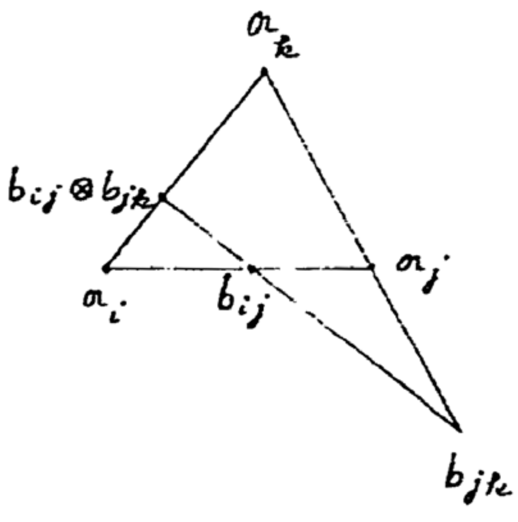


3) Lガ $n-1$ 次元射影空間ナルトキ，Lハ n 個ノ独立ナ点 $a_1, \cdots\cdots a_n$ ヲ含ム．$(a_1, \cdots a_n)$ ガLノ homogenuous Basis デアル。従ッテ order $= n$．a_i ハ必ズシモ点デアル必要ハナイ。従ッテ order モ一意的ニハ定マラナイ。例ヘバ $a_1 =$ L 自身 homogenuous Basis デアッテ，コノトキ order $= 1$．

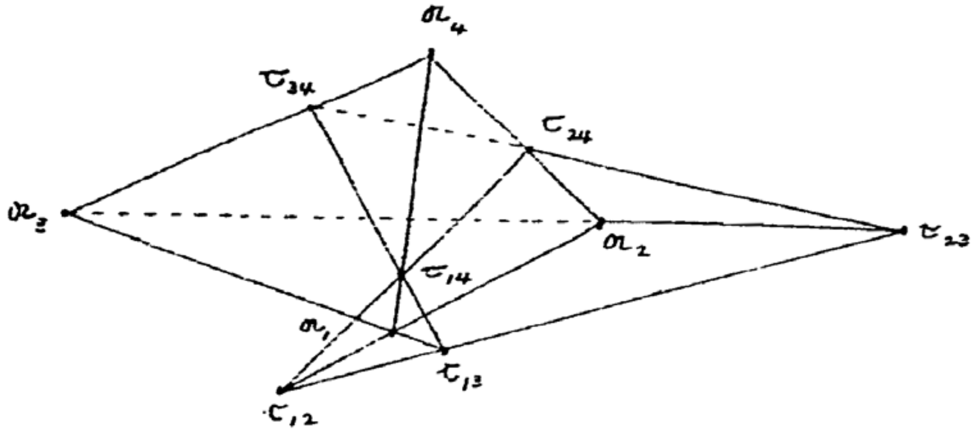
4) $b_{ij} \in L_{ij}$ $(i \neq j)$ ハ直線 $a_i \cup a_j$ 上ニアッテキ a_j ナル点デアル。

$$\overset{\times}{a_i} \quad \overset{\times}{b_{ij}} \quad \overset{\times}{a_j}$$

5) $b_{ij} \otimes b_{jk}$ ノ意味ハ次ノ圖ノ通リ．

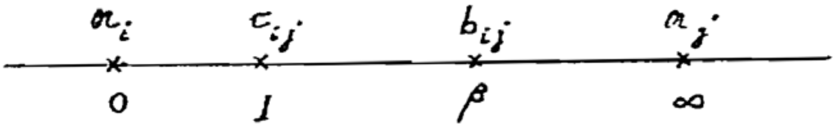


6) normalized frame ノ圖．$n = 4$



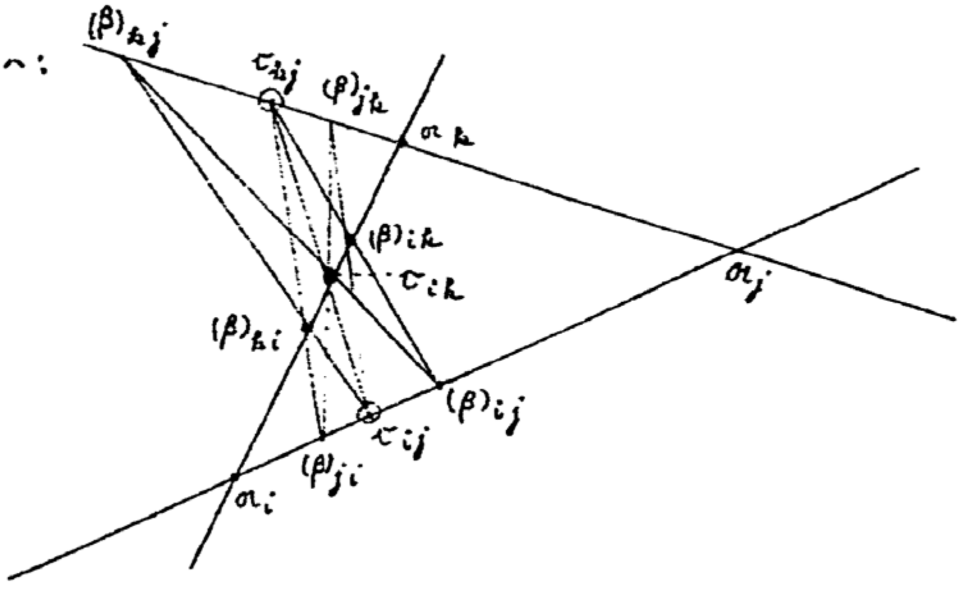
7) 射影幾何デハ直線上ノ点 $b_{ij}=(\beta)_{ij}$ ノ座標 β ヲ複比

$$\beta = \frac{\overrightarrow{a_i\, b_{ij}}}{\overrightarrow{a_j\, b_{ij}}} : \frac{\overrightarrow{a_i\, c_{ij}}}{\overrightarrow{a_j\, c_{ij}}}$$

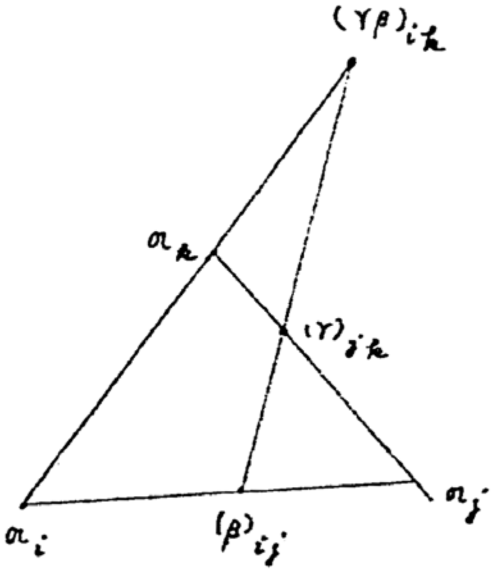


デ定義シタ。一般ノ L ニ於テハ b_{ij} 自身ガ *implicit* ニ座標 β ヲ現ハスモノト考ヘテ $(\beta)_{ij}=b_{ij}$ ニヨッテ β ヲ定義シタノデアル。コノ際, $b_{ij}\,a_j=0$ ハスナハチ $\beta\neq\infty$ ヲ意味スル。

$(\beta)_{ij}$ ノ関係ハ:

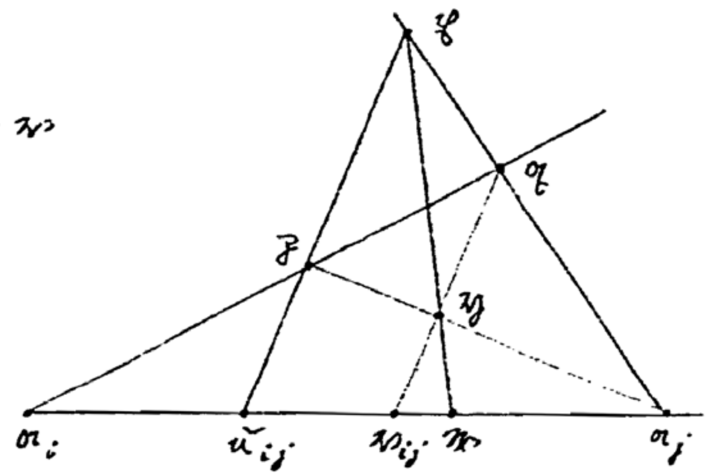


8) 補ノ圖



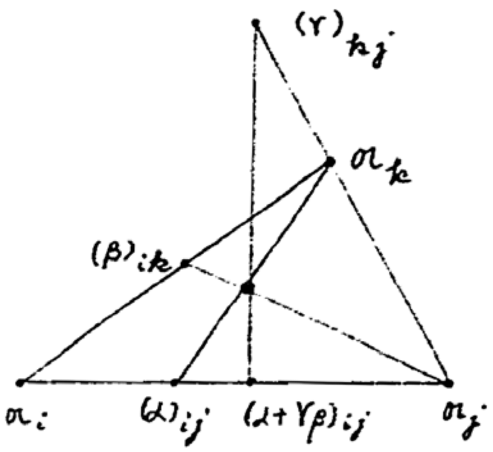
$(\gamma\beta)$ トシ $(\beta\gamma)$ トセヌ理由ハ説明シ難イ。

9) $m = \tilde{u}$ 田 zqx



10) コノ証明ガ射影幾何ノ場合ト同様ナルコトハ圖ヲ書イテ見レバスグ分ル。

11) Lemma 19 ノ式ヲ圖示スレバ

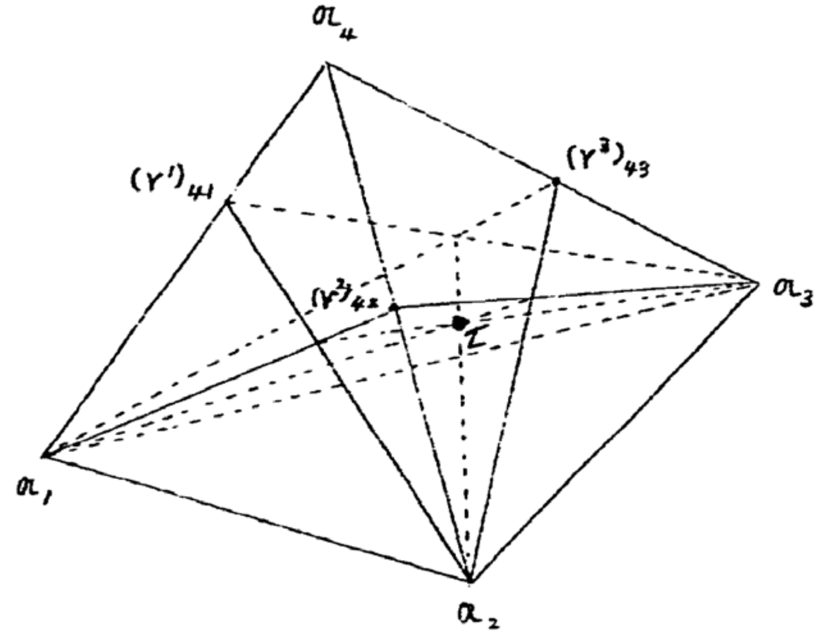


12) コノ§ノ目標ハ定理7ノ証明ニアル。

13) $\tau=(1;\gamma^1\ \gamma^2\ \gamma^3)$ ハ $(\gamma^1)_{41}\vee\alpha_2\vee\alpha_3$,

$(\gamma^2)_{42}\vee\alpha_3\vee\alpha_1$, $(\gamma^3)_{43}\vee\alpha_1\vee\alpha_2$

ナル三平面ノ交点デアル。



14) コノ定理ハ $\alpha^{m-1}(\alpha_m\vee(\beta;\gamma^1\text{-----}\gamma^{m-1}))$ ガ α^{m-1} 内ノ"言葉"デ現ハサレルコトヲ示ス。コノ事ガ次ノ§5デ必要トナル。