747. 確率法則ノ分解問題 V

北川　敏男（阪大）

吾々ハ，今マデ、與ヘラレタ確率法則ノ分解問題ヲ論ズルニ當リ、分解ノ構成因子ヲKト即チ凡ベテノ確率法則ノ集合ニ求メテ來タ。即チ、分解ノ構成因子トシテハ、コレニ何等ノ制限ヲ置カズ，確率法則デアリサヘスレバヨカツタ。無限ニ分解可能トカ、分解不可能トカイフ概念ミミナKニ於ケル分解ニ關スルモノデアツタ。コノ樣ナ分解問題ヲ、Kニ於ケ

ル分解問題ト呼ブナラバ，コレニ對立シテ、特殊領域ニ於ケル分解問題ガアル譯デアル。即チ與ヘラレタ確率法則 $\mathcal{L}$ ヲ分解スルニ際シ、分解ノ構成因子ヲ、K ノ或ル與ヘラレタ特定ノ部分集合 K′ ニ屬スルモノニ局限シタ場合ノ研究モ亦必要デアル。

$\mathcal{L}$ ニ對シテ K′ ノ與ヘ方ハ限リナクアリ、ソノ何レヲ研究スルカハ，任意デアルが．$\mathcal{L}$ ニ何等カノ意味デ近親デアルヤウナ確率法則ノ集合トシテ K′ ヲトツテ、K′ ニ於ケル $\mathcal{L}$ ノ分解問題ヲ論ズルコトカラ始メルノモ一ツノ行キ方デアロウ。實際 K′ トシテ $K[\mathcal{L}]$，$K^*[\mathcal{L}]$ ヲトツタ場合ニツイテハ、以下紹介スル如ク、相當ハッキリシタ結果が知ラレテ居ル。

茲ニ $K[\mathcal{L}]$ ハ，$\mathcal{L}$ ト同ジ型ノ確率法則全部ノ集合ヲ表ハス；$\mathcal{L}_1$ が $\mathcal{L}$ ト同ジ型デアルトイフノハ、$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ ニ對應スル分布函數ヲ夫々 $F(x)$，$F_1(x)$ トスルトキ，適當ニ實數 $a>0$，b ヲトレバ，$F_1(x)=F(ax+b)$ $(-\infty<x<\infty)$ トナルコトヲイフ。又 $K^*[\mathcal{L}]$ ハ，$\mathcal{L}$ ト狹イ意味デ同ジ型ノ確率法則全部ノ集合ヲ表ハス。コレハ $K[\mathcal{L}]$ ノナカデ、特ニ，上述ノ b が 0 ナル如キ確率法則全部ノ集合ヲ意味スル。$K[\mathcal{L}]$，$K^*[\mathcal{L}]$ ノ代リニ夫々 $K[F]$, $K^*(F)$ トモ書ク。

§8. $K[\mathcal{L}]$, $K^*[\mathcal{L}]$ ニ於ケル $\mathcal{L}$ ノ分解問題.

一般ニ確率法則ノ集合 K′ が結合[1]ニ關シテ閉ヂテ居ルトイ

(1) 結合(composition)トハ $F_1 * F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\,dF_2(y)$.

フノハ，K'ニ屬スル任意ノ二ツノ確率法則ノ乘積ガ又、K'ニ屬スルコトヲ意味スル。特ニ，$K^{*}[F]$，$K[F]$ガ結合ニ關シテ閉デテ居ル場合ニハ夫々$F(x)$（或ハ$\mathcal{L}$）ヲバ，安定（*stable*），準安定（*quasi-stable*）ト呼ブコトニスル。安定ナ確率法則，準安定ナ確率法則ノ一般型式ハ，夫レ夫レ *Lévy, Khintchine* ニ依ツテ與ヘラレテ居ル。コレラハ *Gauss* ノ分布$\Phi(x)$ヲ特別ノ場合トシテ含ム。$K[\Phi]$ハ實ニ著シイ性質ヲモツ。以下コレラヲ示サウ。

〔I〕 <u>$K[\Phi]$ニ就イテ</u>： 先ヅ簡單ノ故ヲ以テ$K[\Phi]$ニ關係シタコトカラ始メヨウ。

<u>定理6</u>． $F(x)$ナル分布函數ハ，平均値0，標準偏差1デアルトスル。然ルトキニハ，$K[F]$ガ結合ニ關シテ閉デテ居ルタメノ必充條件ハ$F(x)\equiv\Phi(x)$.[3]

證明： (i) 充分ナコトハ，$\Phi\left(\dfrac{x-m_1}{\sigma_1}\right)*\Phi\left(\dfrac{x-m_2}{\sigma_2}\right)$ノ特性函數ガ$exp\left(im_1t-\frac{1}{2}\sigma_1^2t^2\right)exp\left(im_2t-\frac{1}{2}\sigma_2^2t^2\right)$デアリ、コレハ，$\Phi\left(\dfrac{x-m_1-m_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)$ノ特性函數ニ等シイコト

---

(2) $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

(3) *Cramér* ノ書：*Random variables and distr. functions* ニアル。

(4) *Ueber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion* (*Math. Zeitschr. 41*)

カラ明ラカデアル。(ii) 必要ナコト: 函數方程式:
$F\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)*F\left(\frac{x-m_2}{\sigma_2}\right)=F\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ カラ $m_1=m_2=\cdots\cdots=m_n=0$ トシテ $F\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)*F\left(\frac{x}{\sigma_2}\right)*\cdots\cdots*F\left(\frac{x}{\sigma_n}\right)=F\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma_1^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2}}\right)$ ヲ得。從ツテ $\sigma_1=\sigma_2=\cdots\cdots=\sigma_n=1/\sqrt{n}$ トシテ、$(F(x\sqrt{n}))^{n*}=F(x)$. 然ルニ一方 Lindeberg ノ中心極限定理ニヨリ $(F(x\sqrt{n}))^{n*}\longrightarrow\Phi(x)$. 依ツテ $\Phi(x)=F(x)$. [証終]

定理7. (Cramér)(4) $\mathfrak{K}[\Phi]$ニ屬スル分布函數ノ分解因子ハ $\mathfrak{K}[\Phi]$ ニ屬スル。即チ、二ツノ分布函數 $F_1(x)$ 及ビ $F_2(x)$ が

$$(30)\qquad F_1(x)*F_2(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\qquad(\sigma>0)$$

ナル函數關係ヲ滿足スルナラバ, 實數 σ_i, m_i $(i=1,2,\ \sigma_i>0)$ ヲバ適當ニトツテ $F_i(x)=\Phi\left(\frac{x-m_i}{\sigma_i}\right)$ $(i=1,2)$ トシテ表ハシ得ル。(茲ニ $m=m_1+m_2$, $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$)

コレヲ証明スルノニハ, 次ノ補助定理ヲ用ヰル。

補助定理8. 二ツノ特性函數 $f_1(t)$, $f_2(t)$ ノ積 $f(t)$ が整函數デアルナラバ、ソノ各々モ亦整函數デアル。

証明: $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f(t)$ ニ對應スル分布函數ヲ夫々 $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F(x)$ デ表ハサウ。$f_1(t)f_2(t)=f(t)$ デアルカラ、適當ニ確率変數 X, U, V ヲ選ンデ, U, V

ハ相互ニ独立デ，且ツ $X = U + V$，シカモ、U, V, X ノ特性函数ハ夫々 $f_1(t)$，$f_2(t)$，$f(t)$ デアルヤウニ出来ル。

一般性ヲ失フコトナシニ U, V ノ中央値ヲ 0 ニトレル。

証明ヲ次ノ四段ニ分ツ。

<u>第一段</u>：　$Pr\{|X| \geqq x\} = F(-x-0) + 1 - F(x)$

ハ $x \to \infty$ ノトキ，任意ノ $r > 0$ ニ対シテ、e^{-rx} ヨリ小ナル order デ 0 ニナル：

$$Pr.\{|X| > x\} = o\left(e^{-rx}\right)$$

〔証〕　$f(t)$ ハ整函数デアルカラ、任意ノ実数 $r > 0$ ニ対シテ

$$\frac{f(ir) + f(-ir)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} ch\, rx\, dF(x)$$

トナルコトカラ明ラカ。

第二段：　$$P_f(r) \equiv \frac{f(ir) + f(-ir)}{2} = 1 + r\int_0^{\infty} sh\, rx\, Pr\{|X| \geqq x\}\, dx$$

〔証〕：第一段ト（　）トニヨリ明ラカデアル。

<u>第三段</u>：

$$(31)\quad \begin{cases} \text{(i)} & Pr.\{X \geqq x\} \geqq \frac{1}{2} Pr.\{U > x\} \\ \text{(ii)} & Pr.\{X \leqq -x\} \geqq \frac{1}{2} Pr.\{U \leqq -x\} \\ \text{(iii)} & Pr.\{|U| > x\} \leqq 2 Pr.\{|X| \geqq x\} \end{cases}$$

同様ナ関係が、V ニ関シテモ成立スル。

〔証〕：　(i) ニ関シテハ：　任意ノ正数 ε ニ関シテ

$$\Pr.\{\mathrm{X}>x+\varepsilon\}=1-F(x+\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}(1-F_1(x+\varepsilon-y))\,dF_2(y)$$

$$\geqq\int_{-\infty}^{-0}(1-F_1(x+\varepsilon-y))\,dF_2(y)$$

$$\geqq(1-F_1(x+\varepsilon))\int_{-\infty}^{-0}dF_2(y)$$

假定ニヨリ、0ガ V ノ中央値デアルカラ、$\int_{-\infty}^{-0}dF_2(y)$ ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ小デハナイ。

依ツテ、任意ノ正数 ε ニ関シテ $\Pr.\{\mathrm{X}>x+\varepsilon\}\geqq\frac{1}{2}(1-F_1(x+\varepsilon))$。依ツテ $\varepsilon\downarrow 0$ ナラシメテ、

$$\Pr.\{\mathrm{X}\geqq x\}\geqq\frac{1}{2}(1-F_1(x+0))=\frac{1}{2}(1-F_1(x))$$

コレカラ (i) ヲ得ル。

(ii) ニ関シテモ同様ニ出來ル。(iii) ハ (i), (ii) カラ得ラレル。

<u>第四段</u>：（証明ノ完了）　以上ノ三段ノ結果カラシテ

$$(32)\qquad \Pr.\{|\mathrm{U}|>x\}\leqq 2P(x)=o(e^{-\gamma x})$$

（任意ノ $\gamma>0$ ニ對シテ）

從ツテ、任意ノ $\gamma>0$ ニ對シテ、$f_1(-i\gamma)$, $f_1(i\gamma)$ ガ存在スル。コノ事カラシテ $f_1(t)$ ハ t ノ整函数デアルコトヲ知ル。$f_2(t)$ ニ関シテモ同様デアル。〔証終〕

系 1. 二ツノ特性函数ノ積ガ，0ニナラヌ整函数デアルナラバ，各々モ亦0ニナラヌ整函数デアル。

系 2. 補助定理8ニ於テ

$$(33)\qquad M_{f_i}(r)\leqq 4M_f(r)-2\qquad(i=1,2)$$

但シ，一般ニ $M_\varphi(r)\equiv\operatorname*{Max}_{|z|\leqq r}|\varphi(z)|$ ト置ク。

証明： 先ヅ一般ノ特性函數 $\varphi(z)$ ニ關シテ.

$$|\varphi(z)|=|\varphi(\zeta+i\zeta')|\leqq\varphi(i\zeta')$$

$$(\zeta,\ \zeta'\ real)$$

從ツテ $\varphi(i\zeta')$ ガ ζ' ニ關シテ convex ナコトニ注意シテ

$$M_\varphi(r)\leqq\underset{-r\leqq\zeta'\leqq r}{Max}|\varphi(i\zeta')|\leqq\frac{\varphi(ir)+\varphi(-ir)}{2}=P_\varphi(r)$$

又 $M_\varphi(r)$ ノ定義カラ明ラカニ、$\varphi(\pm ir)$ ハ共ニ $M_\varphi(r)$ ヲコエナイカラ、

$$(34)\qquad P_\varphi(r)\leqq M_\varphi(r)\leqq 2P_\varphi(r)$$

ナル關係ガ一般ノ特性函數ニ關シテ成立ツ。

トナル。然ルニ補助定理8ノ第二段ト第三段(iii)トカラ、$f,\ f_1,\ f_2$ ノ間ニハ

$$P_{f_i}(r)\leqq 2P_f(r)-1\qquad(i=1,2)$$

$$(\text{任意ノ } r>0 \text{ ニ對シテ})$$

ナル關係ガアル。依ツテ結局 $i=1,2$ ニ對シテ

$$M_{f_i}(r)\leqq 2P_{f_i}(r)\leqq 2(2P_f(r)-1)$$

$$\leqq 4P_f(r)-2\leqq 4M_f(r)-2$$

茲ニ、$r>0$ ハ任意デアル。(証終)

<u>定理7ノ證明</u>： $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ ノ特性函數 $exp(imt-\frac{1}{2}\sigma^2t^2)$ ハ 0 ニナラヌ整函數デアルカラ、$F_1,\ F_2$ ノ特性函數ヲ $f_1,\ f_2$ トスルトキ, $f_1(t),\ f_2(t)$ モ亦 0 ニナラヌ整函數デアル。依ツテ $f_i(t)=exp(g_i(t))$ トナルヤウナ多項式 $g_i(t)$ ガアル。コレハ系2ニ依リ、高々2

次デナケレバナラス。即テ $g_i(t)=a_i+b_i t+c_i t^2$ トナルヤウナ常数 a_i, b_i, c_i ガアル。$a_i=0$, $c_i<0$ ナル事ハ $f_i(t)$ ガ特性函数ナルコトカラスグ分ル。〔証終〕

注意： 以上ノ如ク、定理7ノ証明ニハ特性函数ノ簡単ナ性質シカ用キテ居ナイ。シカモ，ソノ結果ハ着目ニ價スルモノト云ヘヨウ。Lévy ハ中心極限定理ノ証明ニ於イテ、コノ定理ヲ豫想シテ、コレヲ用キタ。始メテ証明ヲ與ヘタノハ，Cramér デアルガ、上ノ証明ハ Lévy ノ論文（I，前掲）ニ紹介サレタ Khintchine ノ方法ニ依ル。

注意： 定理6ノ証明ニ於テ Lindeberg ノ中心極限定理ヲ用キタコト、及ビ定理7ガ Lévy ノ中心極限定理ノ証明ニ用キラレルコトニハ注意ヲ要スル。カクノ如ク、分解定理トイフヤウナ代数的ナ結果ト、中心極限定理トイフ Limit process ニ関スル結果トガ、密接ナ関係ニアルコトハ，コレカラ後ノ所論ニ於イテモ屡々見ラレルノデアル。