750. Euclid 空間ノ一ツノ Characterisation

角谷　靜夫（阪大）

Banach 空間ガ一般 Euclid 空間（即チ、有限次元ノ Euclid 空間, separable ナ Hilbert 空間及ビ separable デナイ Hilbert 空間）[1] デアル為メノ一ツノ必要且十分ナ條件ヲ與ヘルノガ目的デアル。

Banach 空間 E ノ一ツノ closed linear subspace E_1 ガ與ヘラレタトキ E_1 デ定義サレタ linear functional ハ良ク知ラレタ如ク E 全体ヘソノ norm ヲ上ゲナイヤウニ linear ニ擴張スルコトガ出来ル。

シカシ linear operator ニ對シテハ同様ナ定理ハ成立シナイ。即チ E_2 ヲ他ノ Banach 空間トスルトキ E_1 ヲ E_2 ニウツス linear operator ハ必ズシモ、E 全体ヘソノ norm ヲ上ゲナイヤウニ擴張スルコトハ出来ナイ。（取ル値ハ常ニ E_2 ニ屬スルモノトスル）。コレハ特ニ $E_2 = E_1$ デ且ツ始メノ linear operator ガ E_1 ニ於ケル identical transformation デアル場合ヲ考ヘテ見レバヨクワカル。コノ場合ニハ我々ノ問題ハ E カラ E_1 ヘノ projection[2] デ

---

(1) 一般 Euclid 空間トハ Banach 空間 E デソノ norm ガ任意ノ $x, y \in E$ ニ對シテ $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ ヲ満足スルモノデアル。

(2) E カラ E_1 ヘノ projection トハ E ヲ E_1 全体ヘウツス linear operator P デアッテ $P^2 = P$ ヲ満足スルモノヲ云フ。

ソノ norm ガ 1 ＝ナルモノガ存在スルカドウカト云フ問題ニナル。又逆ニ斯ルル projection P ガ存在スレバ E_1 ヲ E_2 ヘウツス任意ノ linear operation $y = U(x)$ ニ對シテ $y = U_1(x) = U(P(x))$ トオケバ求ムル拡張ガ得ラレルコトハ明ラカデアル。コツテ我々ハ單ニ E カラ E_1 ヘノ projection ヲ問題ニスレバヨイコトガ分ル。

然ルニ F. J. Murray(3) ガ示シタ如ク、(L_p) $(p>1)$ ニ於テハ norm ガ有限ナ projection ガ存在シナイヤウナ closed linear subspace ガ存在スルカラ斯々ノ問題ハ常ニ可能デハナイ。然ラバコノ問題（norm ガ 1 ノ場合）ガ如何ナル closed linear subspace ニ對シテモ可能デアル如キ Banach 空間ハ如何ナルモノカ？ コレガ一般 Euclid 空間ニ限ルト云フノガ我々ノ結果デアル。一般 Euclid 空間ニテハ如何ナル closed linear subspace ニ對シテモ projection ガ存在スルコトハ容易ニ示スコトガ出来ルカラ、コレデ一般 Euclid 空間ノ一ツノ characterisation ガ與ヘラレタコトニナル。即チ

定理 1. Banach 空間 E ガ一般 Euclid 空間デアルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ E ノ任意ノ closed linear subspace E_1 ニ對シテ E ヲ E_1 ヘウツス norm 1 ノ projection ガ存在スルコトデアル。

---

(3) F. J. Murray: On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p, Trans Amer. Math. Soc. 41 (1937).

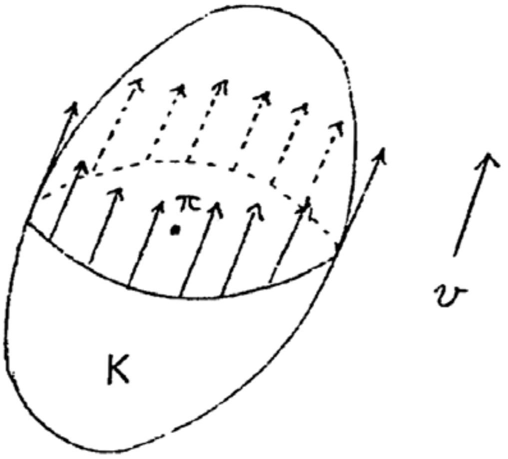
必要ナコトハ明カ。十分ナコトヲ証明スルタメニハ、有限次元ノ所ダケヲ考ヘレバヨイ。次ノ定理ヲ証明スレバ足リル。

> 定理 2. E ヲ 3次元ノ Minkowski 空間[(4)]トスルトキ、若シ原点ヲ通ル任意ノ平面 E_1 ニ對シテ E ヲ E_1 ヘウツス norm 1 ノ projection P ガ存在スレバ E ハ Euclid 空間デアル。

定理 2 ハ次ノ如キ形ニ変形スルコトガ出来ル。

> 定理 3. K ヲ 3次元ノ (Euclid) 空間内ノ有界ナ凸集合ニシテ、原点ヲ内点ニ含ミ且ツ原点ニ關シテ symmetric デアルモノトスル。若シ、原点ヲ通ル任意ノ平面 π ニ對シテ一ツノ方向 v ガ定マッテ、K ノ表面ト π トノ切口ノ各点ヲ通ッテ v ノ方向ニ引イタ直線ガ何レモ K ノ内部ヲ通ラナイ (即チ K ノ Stützgerade ニナル) ナラバ、K ハ Ellipsoid デアル。

コレハ定理 2 ニ於テ $\|x\| \leqq 1$ トナル如キ x 全体ノ集合ヲ K トスレバヨイ。



(4) 有限次元ノ Banach 空間ヲ Minkowski 空間ト云フ。

Kノ表面ガ滑カデ、各点デ切平面ガ unique ニ定マリ、且ツ各々ノ切平面ハ一点ノミニテKニ接スル場合ニハ、コノ定理ハ既ニ証明サレテヰル。[5]

コヽデハ、ソノ様ナ假定ハナイカラ証明ハ少シ面倒デアル。シカシ大体同ジ方法デ証明スルコトガ出来ル。

先ヅKノ表面ノ点ニテ、切平面ガ unique ニ定マル点ヲ regular ト呼ビ、regular デナイ点ヲ singular デアルト呼ブ。Kノ singular ナ点全体ハ spherical measure 0 デアル。[6] 但シKノ表面上ノ点集合Aノ spherical measure トハAヲKノ中心ヨリ unit sphere 上ニ radial ニ射影シタトキノ unit sphere ノ上ノ像ノ measure（球面上ノ Lebesgue measure）ノコトデアル。

次ニKヲ原点Oヲ通ル任意ノ平面 π デ切リ、切口ノ曲線 C_π ヲ考ヘル。C_π ノ上ニKノ regular point ガ dense ニ乗ツテヰルトハ限ラナイ。シカシ任意ノ原点ヲ通ル平面 π_0 及ビ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シテ、π_0 トノ交角ガ ε ヨリ小サク、且ツ C_π 上ニKノ regular point ガ dense ニアル如キ、原点ヲ通ル平面 π ガ存在スル。コレハKノ singular point ガ spherical measure 0 デアルコトカラ容易ニ得ラレル。（Fubini ノ定理ト同様ノ

---

(5) W. Blaschke: Kreis und Kugel; 160頁

(6) Bonnesen und Fenchel: Theorie der konvexen Körper, 　頁

考ヘヲ用フレバヨイ)。

Kガ ellipsoid デアルコトヲ示スニハ任意ノ原点ヲ通ル平面 π ニ對シテ C_π ガ ellipse ニナルコトヲ云ヘバヨイ。次ニ我々ハ補助定理1ニ於テ、C_π ノ上ニ regular point ガ dense ニアル場合ニハ C_π ガ ellipse デアルコトヲ証明スル。サウスレバ上記ノコトヨリ任意ノ C_π ハカカル C_π ノ limit トシテ與ヘラレルカラ、任意ノ C_π ガ ellipse トナリ定理3ノ証明ガ完結スルノデアル。

> 補助定理1. C_π ノ上ニ regular point ガ dense デアレバ C_π ハ ellipse デアル。

補助定理1ヲ証明スルニハ、次ノ補助定理2ヲ証明スレバヨイ。

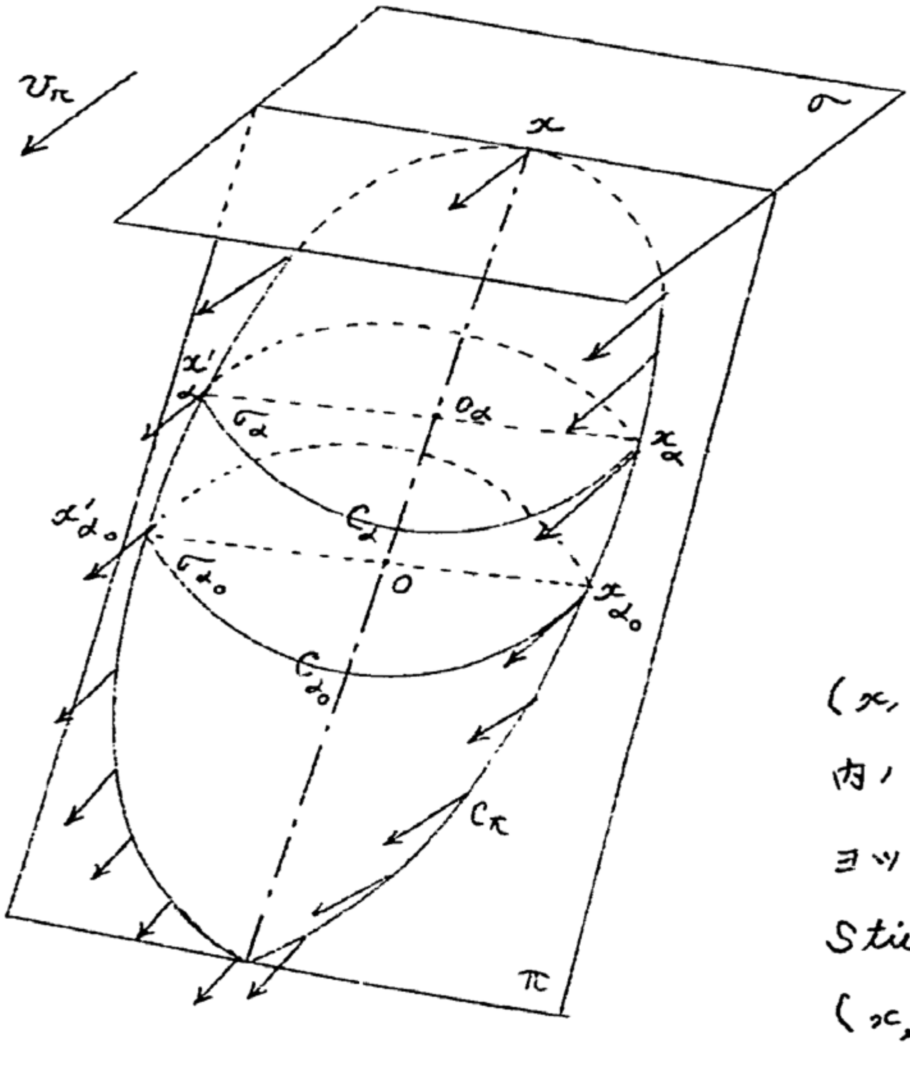
> 補助定理2. C_π 上ノ一点 x ガ regular ナラバ x ヲ通ル C_π ノ直徑ハ、x ニ於ケル C_π ノ切線(コレハ明カニ存在シテ unique ニ定マル)ニ平行ナスベテノ C_π ノ弦ヲ二等分スル。

<u>補助定理2ヨリ補助定理1ヲ証明スルコト</u>。x ヲ C_π 上ノ任意ノ点トスレバ、コレハ C_π 上ノ regular point ノ limiting point デアル。

x ニ右(又ハ左)カラ收斂スル C_π 上ノ regular point ノ sequence ヲ $\{x_n\}$ トスレバ x_n ニ於ケル切線ハ x ニ於ケル右(又ハ左)ノ切線ニ收斂スル。ヨツテ、容易ニ分ル

如ク、コノ切線ニ平行ナ C_π ノ弦ハスベテ x ヲ通ル C_π ノ直径ニヨリ二等分サレル。此ノ如クシテ C_π ノ各直径ニ對シテソレニ "conjugate" ナ方向ガ定マリソノ方向ノ弦ハスベテモトノ直径ニヨリ二等分サレル。ヨツテ C_π ハ ellipse デアル。(補助定理1ノ証明終).

<u>補助定理2ノ証明</u>. x ニ於ケル K ノ切平面(コレハ x ガ regular デアルカラ unique ニ定マル)ヲ σ トシ、σ ト平行ナ平面 σ_α ニヨル K ノ切口ノ曲線ヲ C_α, C_α ト C_π トノ交点ヲ x_α, x'_α トセヨ。定理3ノ假定ヨリ、平面 π ニ對シテ一ツノ方向 v_π ガ定マツテ C_π 上ノ各点 x_α ヨリ v_π ノ方向ニ引イタ直線 (x_α, v_π) ハ何レモ K ノ Stützgerade ニナル。



特ニ $x_\alpha = x$ ノトキヲ考ヘレバ、x ニ於ケル K ノ切平面ハ σ 一ツシカナイカラ (x, v_π) ハ σ 内ノ直線デアル。ヨツテ、各々ノ Stützgerade (x, v_π) ハ平

面O_α内ノ直線デ、平面O_α内ニ於ケルC_αヘノStützgeradeデアル。

コレヨリ補助定理3ニヨリ、C_αハ互ニ相似デアリ、シカモ何レモxヲ通ルKノ直径ガソノ相似ノ中心ヲ通ッテキルコトガワカル。O_αガ特ニ原点ヲ通ッテキルトキ($\alpha=\alpha_0$ナルトキトスル)ヲ考ヘレバC_{α_0}ハKノ中心Oニ對シテSymmetricデアルカラ、各々ノC_αモ中心O_α(O_αハ$x_\alpha x'_\alpha$トxヲ通ル直径Oxトノ交ハリ)ヲ有シテO_αニ對シテsymmetricデアル。ヨッテ$x_\alpha x'_\alpha$ハO_αニヨリ二等分サレル。

$x_\alpha x'_\alpha$ハ何レモxニ於ケルC_πヘノ切線(即チO_αトπトノ交ハリ)ニ平行デアルカラ、補助定理2ノ証明ハ完結スル。

ヨッテ我々ハ次ノ補助定理3ヲ証明スレバヨイ。

補助定理3. 平面上ニ二ツノconvex closed curve C, C′ガアリ、一点Oヲ内部ニ共有スルモノトスル。Oヲ通ル任意ノ半直線トC, C′トノ交点ヲA, A′トスルトキ、A, A′ニ於イテ、互ニ平行ナC, C′ニ對スルStützgeradeヲ常ニ引キ得ルトキハC, C′ハ互ニ相似デアリ、ソノ相似ノ中心ハOデアル。

コレヲ示スタメニハ、次ノ補助定理4ヲ証明スレバヨイ。

補助定理4. $f(x)$, $g(x)$ ガ $a \leqq x \leqq b$ ニテ定義サレタ連續函數デ $a \leqq x \leqq b$ ノ各点ニテ $D_+ f$, $D_- f$, $D_+ g$, $D_- g$ ガ存在スルモノトセヨ。若シ $a \leqq x \leqq b$ ノ各点ニテ $D_+ f = D_+ g$, $D_- f = D_- g$ ガ成立スレバ $f(x) - g(x) = \text{constant}$ デアル。

証明: $a \leqq x \leqq b$ ナル任意ノ x 及ビ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\delta = \delta(x) > 0$ ガ定マッテ $0 < h < \delta(x)$ ナル任意ノ h ニ對シテ

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - D_+ f(x)\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - D_+ g(x)\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{f(x)-f(x-h)}{h} - D_- f(x)\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{g(x)-g(x-h)}{h} - D_- g(x)\right| < \varepsilon$$

トナル。$D_+ f(x) = D_+ g(x)$, $D_- f(x) = D_- g(x)$ ナル故、カヽル h ニ對シテハ $|(f(x+h) - g(x+h)) - (f(x) - g(x))| < 2\varepsilon h$, $|(f(x) - g(x)) - (f(x-h) - g(x-h))| < 2\varepsilon h$. Borel ノ被覆定理ニヨリ $a \leqq x \leqq b$ ハ $(x - \delta(x),\ x + \delta(x))$ ナル形ノ有限個ノ open intervals ニヨッテ覆ハレルカラ、$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n = b$ ナル有限個ノ $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ ヲトッテ $|(f(x_i) - g(x_i)) - (f(x_{i-1}) - g(x_{i-1}))| < 2\varepsilon |x_i - x_{i-1}|$ ガ $i = 1, 2, \cdots, n$ ニ對シテ成立スル様ニ出来ル。ヨッテ

$$\left|(f(b) - g(b)) - (f(a) - g(a))\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} \left| (f(x_i) - g(x_i))\right.$$

$$-(f(x_{i-1})-g(x_{i-1}))\Big| < 2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}| = 2\varepsilon(b-a).$$

$\varepsilon>0$ ハ任意デアツタカラ $f(b)-g(b)=f(a)-g(a)$.

b ノ代リニ任意ノ $a\leqq x\leqq b$ ナル x ヲトレバ

$f(x)-g(x)=f(a)-g(a)$ ヲ得ルカラ $f(x)-g(x)$

ハ constant デアル。