751. 完全連續ナ對稱作用素ノ固有値存在ノ一證明

三村　征雄（阪大）

今迄一番簡單ナ證明ハ Kellog ガ對稱核ニヨル Integral operator ノ場合ニ用ヰタモノデアルト思ッテヰタノデスガ，次ノヤウニスレバ早イ樣デス。（南雲君ノ変分學ニモ一ツノ證明ガ出テ居マス）

<u>假定</u>　A ハひるべると空間ノ線狀作用素デ

(1) 完全連續，スナハチ有界ナ集合ヲ Compakt ナ集合ニ寫ス。

(2) 對稱，スナハチ $(Af, f) = \mathit{real}$.

<u>結論</u>　$A \neq 0$ デアレバ A ハ固有値ヲ持ツ。

<u>證明</u>　(2) カラ $\underset{\|f\|=1}{l.u.b.}|(Af, f)| = \underset{\|f\|=1}{l.u.b.}\|Af\|$ デアル。コレヲ M トシ，且ツ $M = l.u.b.(Af, f) > 0$ トスル。（ソウデナケレバ $-A$ ヲ考ヘレバヨイ）。然ルトキ $\|f_n\| = 1$ デ $(Af_n, f_n) \longrightarrow M$ ナル系列 $\{f_n\}$ ガ存在スル。先ヅ $\|Af_n - Mf_n\| \longrightarrow 0$ ヲ證明スル。スナハチ

$$0 \leq \overline{\lim}\|Af_n - Mf_n\|^2 = \overline{\lim}\left(\|Af_n\|^2 - 2M(Af_n, f_n) + M^2\|f_n\|^2\right)$$
$$\leq M^2 - 2M^2 + M^2 = 0,$$

$$\therefore \quad \|Af_n - Mf_n\| \longrightarrow 0$$

今 (1) ニヨリ $\{f_n\}$ カラ部分列 $\{f_{n_i}\}$ ヲ適當ニトレバ Af_{n_i} ハ强收斂スルヤウニ出來ル。然ルトキ $f_{n_i} = \frac{1}{M}\left(Af_{n_i} - (Af_{n_i} - Mf_{n_i})\right)$

モ強收斂スル。ソノ limit ヲ f_0 トスレバ

$$Af_{n_i} - Mf_{n_i} \longrightarrow 0 \quad (\text{強})$$

デアルレ方

$$Af_{n_i} - Mf_{n_i} \longrightarrow Af_0 - Mf_0 \quad (\text{強})$$

且ツ $\|f_0\| = \lim \|f_{n_i}\| = 1$。ヨッテ M ハ固有値デアル。

注意 コノ証明ハ連続函数ノ空間ト連続ナ核ニヨル積分作用素ノ場合ニモ收斂ノ意味ヲ少シ変更スレバソノマヽ適用サレマス。