# 755. 大數ノ法則, IV

北川 敏男 (阪大)

## §3. *Liapounoff* ノ定理ニ關スル *Lindeberg-Lévy*.

ノ方法（續キ）　次ニ吾々ハ條件（$C_1$）ガ假定サレテナイ場合ヲ論ズル。

コノ時ニハ，$\sigma_\nu^2 \equiv E_{\nu-1}\{X_\nu\}$ ハ，$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{\nu-1}$ ノトル値ニ從属スル確率変數デアル。

今手始メトシテ、或ル $t>0$ ヲ與フルトキ、確率 0 ノ場合ヲノゾイテハ、次ノ二ツノ何レカガ起ルトスル：

(i) $\sum\sigma_\nu^2$ ハ發散スル；　(ii) $\sum\sigma_\nu^2$ ハ收斂シテ而モ $\geqq t$. コノ假定ノモトニ於テハ、確率 0 ノ場合ヲノゾイテハ

$$(1) \quad b_n^2 \equiv \sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2 \geqq t$$

トナル様ナ最小ノ自然數 $n$ ガ存在スル。勿論、$n$ ハ一般ニハ確率変數デアッテ、（$C_1$）ノ假定ノアル場合ノ如ク常數ニナルトハ限ラナイ。トモカク、$n$ ヲカク定義スルトキニハ，

$$(2) \quad b_{n-1}^2 + c\sigma_n^2 = t$$

トナル様ナ $0<c\leqq 1$ ガ存在スル。コヽニ $c$ モ亦確率変數デアル。ソコデ Lévy ハ $t$ ニ於ケル切斷（section）トシテ、上ノ $c$ ヲ用キテ

$$(3) \quad \tilde{S}(t) = S_{n-1} + cX_n$$

ナルモノヲ導入シタ。[1] コノ思想ハ、聯鎖級數ヲ論ズル上ニ於テ、重要ナ役目ヲナス。以下ニ於テコレヲ示サウ。

吾々ハ先ヅ $t$ ヲ固定シテノ結果ヲ先ヅ導カウトスルノデ

---

(1) Original. Lévy: Bulletin des Sciences Mathématiques, (1935) pp. 113　但シコヽデハ，專ラ Lévy ノ著書ニ負フ所ガ多イ。

アルカラ、便宜上$c=1$トシテモ一般性ヲ失ハレナイ。サテソノ約束ノモトデハ

<u>定理4</u>、　條件(C)ガ満足サレ、且ツ$\mathcal{S}(t)$ノ各項ガ絶對値ニ於テ$\varepsilon\sqrt{t}$ヲ超エナイナラバ、任意ノ實數$x$ニ對シテ

$$(4)\quad \left|\Pr\left\{\frac{\mathcal{S}(t)}{\sqrt{t}}<x\right\}-\Pr\left\{\xi<x\right\}\right|<6\varepsilon^{\frac{1}{4}}$$

<u>注意</u>：　吾々ノ規約ノモトデハ$b_n^2=t$デアルカラ、$\mathcal{S}(t)$ノ各項ノ絶對値ガ$\varepsilon\sqrt{t}$ヲ超エナイトイフコトハ(C′)ニ外ナラナイ。但シ、コヽニ注意スベキコトハ定理3ニ於テハ、$b_n$ハ$n$ノ函數ガ一意ニキマッタモノデアルガ、上ノ定理デハ，$b_n$ト$n$トノ關係ハ確率変數的デアルコトデアル。

證明：　常數$\lambda$，確率変數$\lambda$，$Z$，$\xi$ヲバ，定理3ノ證明デ用キタト同ジ意味ノモノトスル。先ヅ、吾々ハ

$$(5)\quad \left|\Pr\left\{\frac{\mathcal{S}(t)}{\sqrt{t}}+\lambda Z<x\right\}-\Pr\left\{\xi+\lambda Z<x\right\}\right|<\frac{k\varepsilon}{2\lambda^3}$$

ヲバ示サウ。コレガ出來レバ，定理3ノ證明デ用キタト同ジ方法ニヨリ、(4)ナル不等式ガ得ラレルカラ。

前回第169号、p. 679下カラ8行目ニ得タ不等式ハ，今ノ場合$b_n^2=t=1$ト$\nu\leqq n$トシテ成立ツ。今ノ場合$n$ガ確率変數トイフコトハ，コノ證明ニ影響シナイ。又$\nu>n$ニ對シテハ$X_\nu=\sigma_\nu=0$トオク。然ルトキニハ同様ナ關係ガスベテノ$\nu$ニ關シテ成立ツ。

$$U_\nu=S_\nu+\sum_{\nu'=\nu+1}^{\infty}\sigma_{\nu'}\xi_{\nu'}$$

ト置カウ。ソコデ $n$ ガ上限デアルトイフコトハ、モハヤ何等ノ意味ヲモタナイ。$\nu \geqq n$ ニ對シテハ常ニ

$$\mathfrak{V}_\nu = S_n = \mathfrak{S}(t)$$

又ヲバ $x - \mathfrak{S}_{\nu-1}$ デ置キカヘルコトニ依リ、次ノ結果ヲウル。

$$(6) \quad \left| \Pr.\{\mathfrak{V}_\nu + Z < x\} - \Pr.\{\mathfrak{V}_{\nu-1} + Z < x\} \right| \leqq k'\varepsilon E\{\sigma_\nu^2\}$$

依ッテ

$$(7) \quad \left| \Pr.\{\mathfrak{S}(t) + Z < x\} - \Pr.\{\xi + Z < x\} \right| \leqq k'\varepsilon E\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu^2\right\}$$

右辺ハ $k'\varepsilon$ ニ等シイ。

以上ニ於テハ $t=1$ トシタガ、一般ノ $t$ ニ對シテハ $\mathfrak{S}(t)$ ヲバ $\mathfrak{S}(t)/\sqrt{t}$ デ置キ換ヘテ考ヘレバヨイ。又 $Z$ ヲバ $\lambda Z\ (\lambda > 0)$ デオキカヘルト、(7) デ $k'$ ハ $k'/\lambda^2$ デオキカワル。コレカラ (5) ヲ得ル。コレデ吾々ノ目的從ッテ定理 4 ノ證明ガ出來タ。〔證明終〕

更ニ進ンデ吾々ハ $\mathfrak{S}(t)$ ノ $t \to \infty$ ノトキノ漸近行動ヲ調ベテ見ヤウ。定理 4 カラ直チニ看取サレル事トシテ：

定理 5. 聯鎖ナ確率変数ノ系列 $\{X_\nu\}$ ニ對シテ、次ノ三ツノ條件ガ満足サレテ居ルトスル：

(i) 條件 (C) ガ成立ツ。

(ii) 確率変数列 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu^2$ ノ発散スル確率ガ 1 デアル。

(iii) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_{\nu,0}^2 = \infty$ トナル様ナ $\{\sigma_\nu\}\ (\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$ ノ値ノ數列 $\{\sigma_{\nu,0}\}\ (\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ニ對シテハ，$n(t)$ ヲ

バ，$\sigma_{1,0}^2+\sigma_{2,0}^2+\cdots\cdots+\sigma_{n,0}^2 \geqq t$ ヲ満足スル最小ノ自然数トスルトキ，次ノヤウナ $t$ ノ函数 $\varepsilon(t)$ ヲバ，$\{\sigma_{\nu,0}\}$ ニ従属シテ撰ブコトが出来ル：

$(\alpha)$ $|X_\nu| < \varepsilon(t)\sqrt{t} \quad (\nu=1,2,\cdots\cdots,n(t))$

$(\beta)$ $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)=0$

然ル時ニハ，スベテノ実数 $x$ ニ対シテ

$$\lim_{t\to\infty} Pr.\left\{\frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

然ラバ上ノ定理デ仮定(ii)ノナイ場合ハ如何，次ニコレヲ研究シヤウ。

今略シク、$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sigma_\nu^2$ が収斂スルトイフ事象ヲバ，Aデ表ハスコトニスル。$Pr.\{A\}=0$ が上ニ考ヘタ場合デ、ソレハ済ンデ居ル。$Pr.\{A\}=1$ ノ場合ハ，問題ニナラナイ。依ツテ以下ニ於テハ，$0<\alpha\equiv Pr.\{A\}<1$ トシテ議論ヲ進メル事ニスル。又 $\beta=1-\alpha$ トオク。

サテ、$\sum_{1}^{\infty}\sigma_{\nu,0}^2 > t^2$ トナル様ナ $\{\sigma_{\nu,0}\}$ デナケレバ，$b_{n,0}^2 \geqq t^2$ トナル $n(t)$ ハアリ得ナク、従ツテ $S(t)$ ハ存在シ得ナイ。$S(t)$ が存在シテコソ、問題ハ起ルノデアルカラ、$\sum\sigma_\nu^2 > t$ ナル事象が起ツタトシテ、ソノ条件ノモトデノ $S(t)$ ノ条件付確率分布ヲ調ベルコトが先ヅ以テ問題トナル。先ヅ次ノ事柄ニ注意シヨウ：

(i) $\sum\sigma_\nu^2 > t$ トナル確率ヲ $\beta'(t)$ トスルト $\beta'(t)\geqq\beta$，且ツ、$t\uparrow\infty$ ノトキ、$\beta'(t)\downarrow\beta$．従ツテ、$\varepsilon'>0$ ヲ任意ニ與ヘルトキ，充分大ナル $t_0(\varepsilon')$ ヲトレバ，$t\geqq t_0(\varepsilon')$ ノ

トキニハ常ニ $1 > \beta/\beta'(t) > 1-\frac{\varepsilon'}{2}$ ナラシメ得ル。

以下、一般ニ、$\mathcal{S}(t)$ ガ定義サレテ居ルトイフ條件ノモトニ於ケル確率ヲ $\overline{Pr}^t$ デ示スコトニスル。一般ニ G, K ナル事象ガ共ニ起ル確率ヲ $Pr.\{G, K\}$ デ、又 G ガ起ツタトイフ條件ノモトニ K ノ起ル確率ヲ $Pr.\{K/G\}$ デ示ス。

(ii) $t \geqq t'(\varepsilon_0)$ ノトキニハ，$\overline{Pr}^t\{A\} < \varepsilon'/2$ ((i)ニ依ル)

(iii) E ハ，$\overline{Pr}^t_\nu\{A\} \geqq 1/2$ トナルヤウナ $\nu$ ガ少ナクモ一ツ存在スル事象トシ，$e_p$ ハ $\overline{Pr.}^t_\nu\{A\} \geqq 1/2$ トナル事象ガ $\nu = p$ ニ於テ始メテ成立スル事象トスル。然ルトキニハ

(1°) $e_p$ ($p = 1, 2, 3, \ldots\ldots$) ハ相互ニ排反デアッテ

$$\sum e_p = E$$

(2°)
$$\overline{Pr}^t\{A/E\} = \sum_{p=1}^{\infty} \overline{Pr.}^t\{A/e_p\}\,\overline{Pr.}^t\{e_p/E\}$$

$$\geqq \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} \overline{Pr}^t\{e_p/E\}$$

依ッテ $\overline{Pr}^t\{A/E\} \geqq \frac{1}{2}$

(iv) $\overline{Pr}^t\{E\}\,\overline{Pr}^t\{A/E\} = \overline{Pr}^t\{A, E\} \leqq \overline{Pr}^t\{A\}$

以上ノ (ii), (iii) ノ 2°, (iv) ヲ一共ニシテ

(8) $\overline{Pr}^t\{E\} < \varepsilon'$ $\quad$ ($t \geqq t(\varepsilon')$ ノトキ)

ナル関係式ヲ得ル。

然ルニ、A ガ実現サレルナラバ，$\overline{Pr}^t_\nu\{A\}$ ハ $\nu \to \infty$ ノトキ 1 ニ収斂シナケレバナラヌ。従ッテソノトキニハ，E ガ實現シナケレバナラヌ。

然ルニ、實ハ (8) ガ成立スルノデアル。依ッテ次ノコトガ云ハレル：$\mathfrak{S}(t)$ ガ定義サレテ且ツ $\overline{\Pr}^t\{A\}<\varepsilon'/2$ ナルトキニハ，確率ガ $\varepsilon'$ ヲ超エナイ場合ヲ除イテハ，A ガ起ラナイ。

A ガ起ラナイ場合、即チ $\sum\sigma_\nu^2$ ガ発散スル場合ハ既ニ論ジタ。以上ノ考察カラ、吾々ハ次ノ定理ヲ導クウ：

定理6. 前定理ノ假定ノウチデ、(i), (iii) ノミヲバ假定シ、(ii) ハ假定シナイトスル。ソシテ $\sum\sigma_\nu^2$ ノ発散スル確率ヲ $\beta$ トシ、$H_t$ ハ $t$ ニ對シテ $\mathfrak{S}(t)$ ガ定義サレテ居ルトイフ事象ヲ意味スルトスル。然ル時ニハ

$$(9)\quad \lim_{t\to\infty}\Pr.\left\{H_t,\ \frac{\mathfrak{S}(t)}{\sqrt{t}}<x\right\}=\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

証明：$\beta=0$ ナラバ自明デアル。依ッテ $\beta>0$ ノ場合ヲ問題ニスレバヨイ。$\beta=1$ ノトキハ前定理ニ外ナラナイ。依ッテ以下デハ $0<\beta<1$ トスル。上述ニヨリ、$\varepsilon'>0$ ヲ任意ニ與フルトキ，$t_0(\varepsilon')$ ガ存在シテ、$t\geqq t_0(\varepsilon')$ ナル各 $t$ ニ對シテ、$\overline{\Pr}^t\{A\}>\varepsilon'/2$ トナリ、確率 $\varepsilon'$ ノ場合ヲノゾイテハ、A ハ起ラナイ。

A ガ起ラナイ場合，即チ C (A) ノ起ル場合ニハ、$\{\sigma_\nu\}$ ナル確率変数列ハ，$\sum\sigma_{\nu,0}^2=\infty$ トナルヤウナ値ノ列 $\{\sigma_{\nu,0}\}$ ヲトル。コレニ對シテハ，前定理ノ假定 (iii) ニ依リ、$\varepsilon(t)$ ガ決定サレル。ソコデ、既ニ得タ結果ヲ利用スルト

$$(10)\quad \left|\Pr'\{\mathfrak{S}(t)<x\sqrt{t}\}-\Pr.\{\xi<x\}\right|<6\sqrt[4]{\varepsilon(t)}+\varepsilon'$$

ヲ得ル。但シ，茲ニ $Pr'$ ハ「$S(t)$ ガ定義サレテ而モソレガ $x\sqrt{t}$ ヨリ小ナル確率」ヲモ或ハ又「$S(t)$ ガ定義サレルナラバ，ソレガ $x\sqrt{t}$ ヨリ小ナル確率」ヲモ意味スルモノトスル。コノ不等式カラ求メル結果ヲウルコトハ容易デアル。