757. 大數ノ法則, V.

北川　敏男（阪大）

§4. 聯鎖級數ノ收斂定理　独立級數（相互ニ独立ナ確率変數ヲ項ニスル級數ニ関シテハ Kolmogoroff ノ不等式（本誌，168号 p.612）ヲ用キルコトニ依リ、次ノ定理ガ得ラレテ居ル。

定理B（Kolmogoroff）　独立級數 $\sum X_k$ ニ於テ

$$(1)\quad E\{X_k\}=0,\quad \sigma_k=E\{X_k^2\}<\infty \qquad (k=1,2,3,\cdots\cdots)$$

ナリトスル。然ルトキニハ

$$(2)\begin{cases}(\mathrm{i}) & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k=\infty \text{ ナラバ}, \sum_{k=1}^{\infty}X_k \text{ ノ收斂スル確率ハ } 0.\\ (\mathrm{ii}) & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k<\infty \text{ ナラバ}, \sum_{k=1}^{\infty}X_k \text{ ノ発散スル確率ハ } 0.\end{cases}$$

然ルニ II，定理2ニ於テ吾々ハ Kolmogoroff ノ不等式ヲ、適當ナ條件ノツイタ聯鎖級數ヘ拡張シ得ルコトヲ示シタ。ソコデ定理Bモ，ソノ適當ナ條件ノモトデハ聯鎖級數ヘ拡張出來ナイカト云フコトが當然問題ニナロウ。コレニ関シテハ

定理7（Lévy）　聯鎖ナ確率変數ノ系列 $\{X_k\}$ ニ於テ各項 X_k ノ絶對値ガ k ニ無関係ナ或ル常數ヲ超ヘズ，且ツ又 $\{X_k\}$ ニ對シテハ，條件（C）ガ成立ツトスル。

然ル時ニハ

$$(3)\begin{cases}\text{(i)}\ \ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2 \text{ ガ発散シ，且ツ} \sum_{k=1}^{\infty} X_k \text{ ガ収斂スル確} \\ \text{率ハ０デアル。} \\ \text{(ii)}\ \ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2 \text{ ガ収斂シ且ツ} \sum_{k=1}^{\infty} X_k \text{ ガ発散スル確率} \\ \text{ハ０デアル。}\end{cases}$$

<u>注意</u>： 定理２（１６８号，p. 613）ニ於テ (6) $E\{X_k^2\} < \infty$（$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$）ヲ用ヰタガ、定理５デ仮定スル $|X_k| \leqq M$（$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$）ハ、ソレヨリハ強イ仮定デアル。條件（C）：$E_{k-1}\{X_k\}=0$（$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$）ガ定理Bノ仮定(i)ニ對應シ，(2) (i) 及ビ (ii) ガ夫々 (3) (i) 及ビ (ii) ニ對應スルコトモ明カデアル。

<u>証明</u>： $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2$ ガ発散スルトキニハ，確率０ノ場合ヲ除イテハ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}X_k$ ノ発散ヲヒキ起スコトハ，前ノ§３デ示シタ(定理３カラ見ラレル)

依ッテ (3), (ii) ヲ示シサヘスレバ宜シイ。今 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2$ ガ収斂スルトイフ事象ヲＡデ表ハシ、$Pr\{A\}=\alpha$ トスル。Ａガ起レバ，$\varepsilon>0$ 及ビ $\varepsilon'>0$ ヲバ任意ニ與フル時，確率変数 n ヲ撰シテ $\displaystyle\sum_{n+1}^{\infty}\sigma_k^2 \leqq \varepsilon^2$ ナラシメ、従ッテ常数（確率変数デナイ）Ｎヲ適當ニトレバ $Pr.\{A, n>N\} \leqq \varepsilon'$ ナラシメ得ル。

サテ N ヲ上ノ如ク定メタトスル。次ニ與ヘラレタ$\{X_k\}$ニ對シテ次ノ如キ變更ヲ加ヘル。先ヅ$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_N$ハ絶對ニ変ヘナイ。即チ與ヘラレタ儘トスル。$k>N$ニ對シテハ，$\sigma^2_{N+1}+\sigma^2_{N+2}+\cdots\cdots+\sigma^2_k \leqq \varepsilon^2$ナル限リ$\{X_l\}$($l=N+1, N+2, \cdots\cdots, k$)ハ不変ニスル。

或ルkデ上ノ$\leqq$ガ成立シナクナルト、ソノk及ビソレカラ先キノkニ關シテハ，$X_l=0$ ($l \geqq k$)トスル。

コノ様ニ変更サレタ聯鎖級數ニ對シテハ，II，〔3〕定理2デ C ノ代リニ$1/\sqrt{\varepsilon}$，S_kノ代リニS_k-S_N ($k \geqq N$)トシテ

$$\Pr.\left\{\underset{N<k<\infty}{Max}\left|S_k-S_N\right|>\sqrt{\varepsilon}\right\}<\varepsilon$$

サテコレハ変更サレタ聯鎖級數ニツイテノ結果デアル。ソコデ、與ヘラレタ聯鎖級數ガ上記ノ変更ヲウケルノハ如何ナル場合カトイフニ、(α) $\sum\sigma^2_k$ガ発散スル場合及ビ (β) $\sum\sigma^2_k$ガ収斂スル場合ニ於ケル高々確率ε'ノ場合ノ二ツノ場合シカアリ得ナイ。

ε，ε'ハ任意ノ正數デアルカラ、コレヲ如何程デモ小サク出來ル。依ッテ上ノ推論カラ、事象 A ガ實現スルナラバ，確率変數列$\{S_k\}$ハ確率0ノ場合ヲ除イテハ一ツノ極限ニ収斂スルトイフコトガイヘル。即チ (ii) ガ示サレタ。〔証終〕

<u>系</u>： 聯鎖ナ試行ノ無限系列ニ於テ或ル事象 E ノ實現スル數ハ，確率 0 ノ場合ヲ除ケバ、

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} Pr_{k-1}\{E_k\}$$

ト同時ニ有限トナリ、同時ニ發散トナル。但シ E_k ハ k 番目ノ試行ニ於テ E ノ實現スルトイフ事象ヲ示スコトトスル。

証明: 確率変數 X_k ハ E_k ガ實現スレバ 1, 然ラザレバ 0 トナルトスル。定理5ヲバ, $\sum Y_k = \sum\{X_k - \alpha_k\}$ ニ對シテ施ス, コノ級數ニ關シテハ, $\sigma_k \equiv E_{k-1}\{Y_k^2\} = E_{k-1}\{(X_k-\alpha_k)^2\} = \alpha_k(1-\alpha_k)$ デアル。

先ヅ $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(1-\alpha_k) < \infty$ トナル場合

コノ時ニハ定理7ニ依リ $\sum Y_k$ ハ確率0ノ場合ヲノゾケバ收斂スル。コレハ確率0ノ場合ヲノゾケバ, $\sum X_k$, $\sum\alpha_k$ ハ同時ニ發散(無限大)ナルカ同時ニ收斂ナルカデアルコトヲ示ス。

次ニ $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ ガ發散スル場合。 コノ事象ヲ A' デ示サウ。$\sum\sigma_k^2=\infty$ ナラバ $\sum\sigma_k=\infty$ デアルカラ、系ノ成立ツヲ示スニハ, 結局 $Pr.\{A', \sum_{k=1}^{\infty}X_k<\infty\}=0$ トナル事ヲ云ヘベヨイ。今假リニソウデナイトスル。然ル時ニハ $Pr.\{A', \sum_{k=1}^{\infty}X_k < N\} = P > 0$ トナル様ナ整數 N ガ存在スル。コレガ矛盾ニ陥ルコトヲ示サウ。事象 A' ノモトニ於テハ, §3, IV デ定義シタ $n(t)$, $S(t)$ ガ定義サレル,

即チ $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \geqq \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(1-\alpha_k)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 \geqq t$ トナル様ナ n ガ存在スル。依ツテ $Pr.\left\{A', \sum_{k=1}^{N} Y_k < N-t\right\} \geqq P>0$

依ツテ、コノコトハ $\left|\sum_{k=1}^{N} Y_k\right| = \left|S(t)\right|$ ハ t ニ無関係ナ正數 P ノ確率ノ場合ニ於テ t ノ大キサデアルコトヲ示ス。然ルニ定理 4 ニ依レバ t ガ充分大ナラバ，$|S(t)|$ ハ $\sqrt{t}$ ノ大キサデナケレバナラヌ，コレハ矛盾デアル。(証終)

§5. 聯鎖系列ニ關スル中心極限定理　§3 ニ述ベタ Liapounoff ノ定理ノ發展トシテ所謂 Lévy ノ中心極限定理トイフノガ知ラレテキル。先ヅ或ル數 $\gamma\ (0<\gamma<1)$ ニ對スル $S_n = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n$ ノ散縮度ヲ $l_n(\gamma)$ デ表ハシ，或ル $\varepsilon>0$ ニ對シテ

$$
(5)\begin{cases}
\text{(i)} & Pr.\{|X_k| > \varepsilon\, l_n(\gamma)\} \equiv \alpha_{n,k}(\varepsilon) \\
\text{(ii)} & \underset{1\leqq k \leqq n}{Max}\ \alpha_{n,k}(\varepsilon) \equiv \alpha_n(\varepsilon) \\
\text{(iii)} & \eta_n(\varepsilon) \equiv \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}(\varepsilon)
\end{cases}
$$

ナルモノヲ導入スル。更ニ、次ノ概念ヲ導入スル。

条件 (N_1)：　任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $\lim_{n\to\infty}\alpha_n(\varepsilon)=0$ ナルコトヲ意味スル。コレヲ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ ハ S_n ノ散縮度 $l_n(\gamma)$ ニ比シ，個々ニ無視シ得ルニ至ルトイフ。

条件 (N_2)：　任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $\lim_{n\to\infty}\eta_n(\varepsilon)=0$ ナルコトヲ意味スル。コレヲ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ ハ S_n ノ

散縮度 $l_n(\gamma)$ ニ比シ，最大項ニ於テ無視シ得ルニ至ルトイフ。

コレニ関シテ

<u>定理C</u>（Lévy）独立ナ確率変数ノ系列 $\{X_n\}$ ニ於テ條件（N_1）ガ成立ツトスル。然ルトキ適當ニ選ンダ数列 $\{A_n\}$，$\{N_n\}$ ニ対シテ $(S_n-A_n)/N_n$ ガ $n\to\infty$ ノトキ Gauss ノ分布 $\Phi(x)$ ニ法則收斂スルタメノ必充條件ハ條件（N_2）ノ成立スル事デアル。

コレニ對應スル聯鎖級数ノ定理モ亦 Lévy ニ依ッテ與ヘラレタ。先ヅ定理 C ノ條件ノ充分ナルコトニ對應スルモノトシテ：

<u>定理 8</u>（Lévy）[1] 聯鎖系列 $\{X_k\}$（$k=1,2,3,$ -----）ニ對シテ、次ノ條件ガ滿足サレテヰルモノトスル。

(i) 各 k ニ對シテ次ノコトガ成立ツ： $X_1, X_2,$ ---------, X_{k-1} ガ知ラレテヰルトキ X_k ノ從フ條件付確率ハ對稱的デアル。即チ任意ノ正数 x ニ對シテ $Pr_{k-1}\{X_k<-x\}=1-Pr_{k-1}\{X_k>x\}$（$k=1,2,3,$-----）（コレヲ條件（$C_1$）デ示ス）

(ii) $\varepsilon>0$，$\gamma>0$，$\eta'>0$ ヲ任意ニ與フルトキ，$t_0(\varepsilon,\gamma,\eta')>0$ ガ定マリ．$t\geqq t_0(\varepsilon,\gamma,\eta')$ ナル任意ノ各

---

(1) Paul Lévy: Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indép. ou enchainées. Journ. de Math. tome XIV (1935), Théorème VII. (p. 393)

t ニ對シテ、$n(t)$, $S(t)$ ガ前 §3 ノ如ク定義スルコトガ出來, 且ツ又

$$(6) \quad \eta_{n(t)} \equiv \sum_{k=1}^{n(t)} Pr_{k-1}\left\{|X_k|_{(>}\eta'\sqrt{t}\right\}$$

ト置イトキニハ

$$(7) \quad Pr.\left\{\eta_{n(t)} > \varepsilon\right\} < \gamma$$

ナラシメ得ル。

然ル時ニハ、任意ノ實數 x ニ對シテ

$$(8) \quad \lim_{t\to\infty} Pr.\left\{\frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x\right\} = \Phi(x)$$

注意: 證明ニ先チ定理8ノ條件ヲ定理5ノソレト對比シテ見ルト定理5ノ條件(C)ハ今ハ(C_1)ニ依ツテ、置キカヘラレテ居ル。(C_1)ハ勿論(C)ヨリ強イ。定理5ノ(ii), (iii)ニ相應スル役ヲ定理7ノ(ii)ガナシテ居ル。並デ尤モ注意スベキコトハ, 定理5ノ(iii)、コレハアル意味ニ於テ$|X_\nu|$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$ ノ一樣有界性ノ條件デアルが、ソレガ定理7ノ假定中ニハナイノデアル。一樣有界性ハ假定シナイが、無闇ニ大キクナラナイトイフ條件——ソレハ定理Cデハ條件(N_2)デアルガ——コノ場合, 定理8ノ(ii)デ與ヘテ居ルノデアル。

證明: $\varepsilon>0$, $\gamma>0$, $\eta'>0$ ヲ任意ニ與ヘタトスル。(ii)ニヨリ $n(t)$ヲ定メル。次ニ聯鎖確率変数ノ行列ヲ導入スル:

$$(9)\quad X'_{n(t),\nu}=\begin{cases}0 & [\,|X_\nu|\geqq\varepsilon'\sqrt{t}\ ノトキ]\\ X_\nu & [\,|X_\nu|<\varepsilon'\sqrt{t}\ ノトキ]\end{cases}$$

$$(\nu=1,2,\cdots\cdots,n(t))$$

條件 (C_1) ニ依リ、$E_{\nu-1}\{X'_{n(t),\nu}\}=0$ デアル。

即チ

$\{X'_{n(t),\nu}\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots,n(t))$ ニ對シテハ條件 (C) ガ成立チ、且ツ各項ハ $\eta'\sqrt{t}$ ヲ超ヘナイ。依ッテ定理 4 ニ依リ、今 $S'(t)=X'_{n(t),1}+\cdots\cdots+X'_{n(t),n(t)}$ ト置クトキニハ，スベテノ實數 x ニ對シテ

$$(10)\quad \left|\Pr.\left\{\frac{S'(t)}{\sqrt{t}}<x\right\}-\Phi(x)\right|<6\,\eta'^{\frac{1}{4}}$$

他方ニ於テ、$S(t)$ ト $S'(t)$ トガ相異ル確率ヲ考ヘルニソレハ $\Pr.\{\eta_{n(t)}>0\}$ ヲ越ヘナイ。然ルニ

$$(11)\quad \Pr.\{\eta_{n(t)}>0\}=\Pr.\{\eta_{n(t)}>\varepsilon\}+\Pr.\{\varepsilon\geqq\eta_{n(t)}>0\}$$

デアリ、假定 (ii) ノ (7) ニ依リ、(11) ナル値ハ $\gamma+\varepsilon$ ヲコエナイ。

依ッテ (10) トヽ共ニシテ

$$\left|\Pr.\left\{\frac{S(t)}{\sqrt{t}}<x\right\}-\Phi(x)\right|<6\,\eta'^{\frac{1}{4}}+\gamma+\varepsilon$$

コレカラ (8) ヲ得ル。

<u>注意 1:</u>　定理 8 ノ證明ノ要点ハ (9) ヲ考ヘルトコロニアル。假リニ、條件 (C) シカ假定シナカッタトスルト、$\{X'_{n(t),\nu}\}$ ガ條件 (C) ヲ滿足スルトハ限ラナクナル。ソコデ始メニ、(C) ヨリモ強イ條件 (C_1) ヲ假定シテ置イ

タノデアル。要ハソコニアルノダカラ、條件 (C_1) ニカナリノ modifications ヲ加ヘテモ宜シイ譯デアル。例ヘバ:

$\boxed{\text{例 1}}$ $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_{n-1}$ ノトル値ニ依ツテ定メテモヨイ。B_n ノ系列 $\{B_n\}$ ニ対シテ若シモ $\sum Pr_{n-1}\{|\mathfrak{X}_n| > B_n\}$ ガ收斂スル確率ガ1デアルナラバ各法則 $\mathcal{L}^{(n)}_{n-1}$(即チ $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_{n-1}$ ヲ知ルトキ $\mathfrak{X}_n$ ノ從フ確率法則)ニ對シテハ、$(-\infty, -B_n)$, (B_n, ∞) ニ對スル部分ノ法則ヲ如何ニ変ヘテモ上ノ定理8ノ成否ニハ変リナイワケデアルカラ、適當ニ変ヘテ変ツタ $\mathcal{L}^{*(n)}_{n-1}$ ニ對シテハ條件 (C_1) ガ成立ツトイフ條件デモ定理8ハ成立ツ。

$\boxed{\text{例 2}}$ $\lim\limits_{t\to\infty} C_{n(t)}/t = 0$, 且ツ $\lim\limits_{t\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n(t)} Pr_{k-1}\left\{|\mathfrak{X}'_{n(t),k}| < C_{n(t)}\right\} = 0$ トナル如キ $\{C_{n(t)}\}$ ニ對シテハ $\mathcal{L}^{(n)}_{n-1}$ ノ $(-C_{n(t)}, C_{n(t)})$ ニ對スル分布状態ヲ如何ニ変ヘテモ定理8ノ成否ニハ関係シナイ。

<u>注意2</u>: 上ノ証明ニ於テ standard deviation ヲ使用シテ居ル($n(t)$, $S(t)$ ノ定義ニ於テ)コレヲ散布度デ置キ換ヘ得ナイカ。ソノ方ガ定理Cトノ聯関ヲ明カニスルノデアルカラ望マシイト思フ。