759. 完全連續ナ對稱作用素ノ固有値存在ノ証明

吉田　耕作（阪大）

三村征雄氏ノ証明（談話571）ハ誠ニ鮮ヤカデアツテ

之レ以上簡単ナ証明ハ存在シナウモナイ。餘リ巧スギナ三村氏ニ之ヲ伺ッタトキ、ピント來ナカッタノデスガ、次ノ如ク二段ニ分ケテ考ヘルトソノカラクリガワカル様ニ思ヒマス。

但シ弱收斂ノ概念ヲ使ハネバナリマセン。コンナモノヲ使ハズニ済ム所ニモ三村氏ノ方法ノ巧サガアル訳デスガ，Hilbert 空間ニ於テハ弱收斂ハソウ難シクハナイノデスカラ許シテ頂ク事ニシマセウ。

$\boxed{第一段}$ Hilbert 空間ノ對稱連続作用素Tガ

$$\begin{cases} \underset{\|x\|=1}{l.u.b.}(Tx, x) = \underset{\|x\|=1}{l.u.b.}\|Tx\| = M \\ (Tx_0, x_0) = M, \quad \|x_0\| \leqq 1 \end{cases}$$

ヲ満足スルナラバ $Tx_0 = Mx_0$。

証明: 三村氏ノ論法デ（同氏ノ証明ノ初ノ部分参照）

$$0 \leqq \|Tx_0 - Mx_0\|^2 = \|Tx_0\|^2 - 2M(Tx_0, x_0) + M^2\|x_0\|^2$$
$$\leqq M^2 - 2M^2 + M^2 = 0$$

カラ $Tx_0 = Mx_0$ ヲ得ル。

$\boxed{第二段}$ Hilbert 空間ノ對稱完全連続作用素Tガ

$$\underset{\|x\|=1}{l.u.b.}(Tx, x) = \underset{\|x\|=1}{l.u.b.}\|Tx\| = M > 0$$

ナラバ $(Tx_0, x_0) = M$. $(\|x_0\| \leqq 1)$ ナル x_0 ガ存在スル。$M > 0$ カラ必然的ニ $x_0 \neq 0$，モット正シク $\|x_0\| = 1$ デアル。

証明: M ノ定義カラ $\lim_{i\to\infty}(Tx_i, x_i) = M$, $\|x_i\| = 1$

ナル系列 $\{x_i\}$ ガアル。Hilbert空間ノ単位球ハ弱compactダカラ，之ノ部分列 $\{x_{i'}\}$ ガ弱収斂スル：

$\lim_{i'\to\infty} x_{i'} = x_0$（弱）。 Tノ完全連続性カラ $\lim_{i'\to\infty} Tx_{i'}$

$= Tx_0$（強）。 故＝ $M = \lim_{i'\to\infty}(Tx_{i'}, x_{i'}) = (Tx_0, x_0)$.

又弱収斂ト云フコトカラ $\|x_0\| \leqq \underline{\lim}_{i'\to\infty} \|x_{i'}\| = 1$。　　以上

$\boxed{\text{注意}}$　序デ乍ラ，上ノ証明カラワカルコトハ任意ノ *Maximalfolge* $\{x_i\}$ カラ任意ノ弱収斂列 $\{x_{i'}\}$ ヲ撰ベバ固有値Mニ属スル固有函数（絶対値1）ニ弱収斂スルワケデス。