

762. Bessel 微分方程式カラ導カレル
一ツノ微分方程式ニツイテ

伊 藤 誠 (広島商工)

1. 今私ノ方ノ學校ノ電氣學教室デ、導体管ノ中ヲ通
シテ電磁波ヲ送ル研究ヲシテ居ラレマス。ソノ際矩形断面ノ
環内ノ電磁波ヲ求メヌウトシテ、次ノ様ナ形ノ微分方程式ニ
到達致シマシタ。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x^2 + n^2}{x^2 - n^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (1)$$

特ニ $n = 0$ ナル場合ニハ此ノ微分方程式ハ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (2)$$

トナリマス。今 $y = xz$ トオケバ、之レハ更ニ

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) z = 0 \quad (3)$$

＋ル際一階 / Bessel 微分方程式トナリ、従ッテソノ一
般解ハ

$$z = AJ_1(x) + BY_1(x)$$

デ與ヘラレマス故、(2)ノ一般解トシテ

$$y = AxJ_1(x) + BxY_1(x)$$

ヲ得マス。

扱テ然ラバ (1)ノ一般解ハ如何ト申シマスト、之ハ次ノ
様ナ方法ヲ求マリマス。

先ッ第 n 階 / Bessel 微分方程式

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) z = 0 \quad (4)$$

ヲ書キカヘテ

$$\frac{d(xz')}{dx} = -\frac{1}{x}(x^2 - n^2)z \quad (5)$$

之レヲ微分シテ

$$\frac{d^2(xz')}{dx^2} = -\left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)z - \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)xz' \quad (6)$$

(5)ヲ代入シテ

$$= \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) \cdot \frac{x}{x^2 - n^2} \cdot \frac{d(xz')}{dx} - \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)(xz')$$

従ッテ

$$\frac{d^2(xz')}{dx^2} - \frac{x^2 + n^2}{x^2 - n^2} \cdot \frac{d(xz')}{x dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)(xz') = 0,$$

$y = xz'$ トオケバ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x^2 + n^2}{x^2 - n^2} \cdot \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0$$

トナリ、(1) + ル微分方程式が得ラレマス。

依ツテ (4) ノ一般解ヲ

$$z = AJ_n(x) + BY_n(x)$$

トシマス、(1) ノ一般解トシテ直チニ

$$y = AxJ'_n(x) + BxY'_n(x) \quad (7)$$

ヲ得マス。

上ノ解法ハ一寸技巧的ニ見エマスガ、実ハ他ノ方面カラ此ノ解ヲ求メタ後ニ考ヘ出シタモノデス。正固カラ解ク方法ガナリマシタラ御教示願ヒタイト存ジマス。

(昭和 13. 12. 28)