765. Banach 空間ニ於ケル positive Operation III

角谷　静夫（阪大）

Iニ於テハ positive operation ノ固有値ノ存在ニ関スル Rutmann ノ結果ヲ Schauder ノ不動点定理ヲ用ヒズニ証明シタ。証明ハ Rutmann ノソレヨリモ簡単デアルガ norm ト semi-order トノ関係ニ対シテ仮定（I）ヲオイタ。

コノ仮定ハ大概ノ場合ニ満足サレテヰルカラ、コレデモ十分ナノデアルガ、出来レバコノ仮定ヲ除キタイノデアル。実際 Rutmann ノ証明方法ニヨレバ（I）ハ不要デアルカラ、Rutmann ノ証明ハ少々複雑デアッテモ結果ハ大イニヨ

イワケデアル。然ルニ Rutmann ノ論文ハ単ニ定理トソレヲ証明スルニ要スル lemma トヲ書イテアルダケデアルカラ、Rutmann ノ証明ヲソノマヽ辿ルコトハ出来ナイ。次ニ、大体 Rutmann ノ考ヘニ従ツテ、定理ノ証明ヲ與ヘル。Rutmann ガ果シテコノ通リ考ヘタカドウカハ疑問デアルガ、大体コノヤウニ考ヘタコトハ明カデアリ、又實際コレニヨツテ(I)ヲ必要トシナイ定理ノ証明ガ得ラレル。

先ヅ定理ヲ再ビ記サウ。

定理 1′. E ヲ semi-order ノアル Banach 空間，T ヲ E ヲ E ノ中ヘウツス positive, completely continuous ナ linear operator トスル。若シ $Tx_0 \geqq C_0 x_0$ トナル如キ positive element $x_0 > 0$ 及ビ positive real number $C_0 > 0$ ガ存在スレバ $Ty_0 = d_0 y_0$ トナル如キ positive element y_0 及ビ positive real number $d_0 \geqq C_0 > 0$ ガ存在スル。[1]

$\boxed{\text{補助定理 I}}$ E ヲ semi-order ノツイタ Banach 空間、$x_0 > 0$ ヲ E ノ任意ノ positive element トスレバ $f(x_0) > 0$ トナル如キ E 全体デ定義サレタ positive linear functional $f(x)$ ガ存在スル。但シ E デ定義サレタ linear functional $f(x)$ ガ positive デアルト云フノハ $x \geqq 0$ ナル任意ノ x ニ對シテ $f(x) \geqq 0$ トナルコトデアル。

証明: S ヲ E ノ positive part トセヨ。S ハ

(1) $|x_0| = 1$ デアルト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。

E ノ strong topology ニテ開デテオル。ヨッテ今 $p(x)$ ヲ $p(x)=\underset{x'\in S}{\mathrm{l.u.b.}}\|x-x'\|$ ニヨッテ定義スレバ $x\in S$ ナルトキ $p(x)=0$, $x\bar{\in} S$ ナルトキ $p(x)>0$ デアル。且ツ $p(x)$ ハ

(i) $p(tx)=tp(x)$, $t>0$, $x\in E$

(ii) $p(x+y)\leqq p(x)+p(y)$, $x, y\in E$

ヲ満足スル。(i) ハ明カデアルカラ (ii) ヲ証明シヨウ。$p(x)$ ノ定義ヨリ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $\|x-x'\|<p(x)+\varepsilon$ ナル如キ $x'\in S$ ガ存在スル。同様ニシテ $\|y-y'\|<p(y)+\varepsilon$ ナル如キ $y'\in S$ ガ存在スル。ヨッテ

$\|(x+y)-(x'+y')\|<p(x)+p(y)+2\varepsilon$. $x'+y'\in S$ デアルカラ $p(x+y)<p(x)+p(y)+2\varepsilon$. $\varepsilon>0$ ハ任意デアッタカラ (ii) ヲ得ル。

次ニ $p(x)$ ヲ $x=tx_0$, $t\gtrless 0$ ナル範囲ニテ考ヘレバ $t\geqq 0$ ナル所ニテハ $p(tx_0)=0$, $t<0$ ナル所ニテハ $p(tx_0)>0$. シカモ $p(tx_0)=|t|\cdot p(-x_0)$ トナッテオル。ヨッテ $\varphi(tx_0)=-t\cdot p(-x_0)$, $t\gtrless 0$ ニヨッテ $\varphi(x)$ ヲ定義スレバ $\varphi(x)$ ハ $x=tx_0$, $t\gtrless 0$ ナル形ノ x ニ對シテ定義セラレテ、且ツコヽニテ $\varphi(x)\leqq p(x)$ ヲ満足スル。

ヨッテ Banach ノ linear functional ノ拡張ノ定理ニヨリ $x=tx_0$, $t\gtrless 0$ ナルトキ $\Phi(x)=\varphi(x)$, $x\in E$ ナルトキ $\Phi(x)\leqq p(x)$ トナル如キ E 全体ニテ定義サレタ linear functional $\Phi(x)$ ガ存在スル。

$f(x) = -\Phi(x)$ トオケバ、コノ $f(x)$ ガ求ムルモノデアル。

先ヅ $x \in S$ ナルトキハ $f(x) = -\Phi(x) \geqq -p(x) = 0$ ，

次ニ $f(x_0) = -\Phi(x_0) = -\varphi(x_0) = \varphi(-x_0) > 0$

$\boxed{\text{補助定理2}}$ $\varepsilon > 0$ ヲ任意ノ positive real number トセヨ。$x \geqq \|x\| \cdot \varepsilon \cdot x_0$ ヲ満足スル如キEノ点 x 全体ノ集合ヲ S_ε トスレバ $S_\varepsilon \subset S$ ニテ且ツ S_ε ハ S ト同様ニ次ノ條件ヲ満足スル。

(1) $x \in S_\varepsilon,\ y \in S_\varepsilon \longrightarrow x + y \in S_\varepsilon$

(2) $x \in S_\varepsilon,\ \lambda \geqq 0 \longrightarrow \lambda x \in S_\varepsilon$

(3) S_ε ハ strong topology ニテ closed

(4) $x \in S_\varepsilon,\ x \neq 0 \longrightarrow -x \,\overline{\in}\, S_\varepsilon$

証明ハ容易デアルカラ省略スル。

$\boxed{\text{補助定理3}}$ 任意ノ $x \in S$ ニ對シテ

$U_\varepsilon(x) = x + \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|x\| x_0$ トオケバ U_ε ハ S ヲ S_ε ノ中ニウツス連續寫像デアル。

証明： $x + \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\| \cdot x_0 \in S_\varepsilon$ トナルコトノミヲ証明スレバヨイ。

コレハ実際 $x + \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\| \cdot x_0 \geqq \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\| \cdot x_0 = \varepsilon\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\|x\| x_0$

$= \varepsilon\left(\|x\| + \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\|\right) x_0 \geqq \varepsilon \cdot \left\|x + \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\| \cdot x_0\right\| \cdot x_0$ ヨリ

明カ。但シ計算ノ途中ニテ $\|x_0\| = 1$ トナルコトヲ用ヒタ。

$\boxed{\text{補助定理4}}$ S_ε ノ点 x ニテ $f(x) = 1$ ヲ満足スルモノ全体ノ集合Kハ convex、且ツ有界デアル。但シ

$f(x)$ ハ補助定理1ニ於テ定メラレタ linear functional デアル。

証明： Kガ convex ナルコトハ明カ。Kガ有界ナルコトハ次ノ如ク証明サレル： $x\in K$ ナラバ $x \geqq \|x\|\cdot\varepsilon\cdot x_0$ ナルコトヨリ $1=f(x)\geqq\|x\|\cdot\varepsilon\cdot f(x_0)$. ヨッテ

$$\|x\|\leqq\frac{1}{\varepsilon\cdot f(x_0)}$$

$\boxed{\text{補助定理 5}}$ $\delta_\varepsilon>0$ ガ定マッテ $x\in K$ ナルトキ $f(U_\varepsilon T x)\geqq\delta_\varepsilon>0$

証明： $f(U_\varepsilon T x)=f\left(Tx+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|Tx\|\cdot x_0\right)$

$$=f(Tx)+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\|Tx\|\cdot f(x_0)\geqq f(Tx)\geqq f(T(\|x\|\cdot\varepsilon\cdot x_0))$$

$$=\|x\|\cdot\varepsilon\cdot f(Tx_0)\geqq\|x\|\cdot\varepsilon\cdot C_0\, x_0\geqq\frac{f(x)}{\|f\|}\cdot\varepsilon\cdot C_0 x_0$$

$$=\frac{\varepsilon C_0 x_0}{\|f\|}\equiv\delta_\varepsilon>0$$

定理ノ証明： 任意ノ $x\in S_\varepsilon$, $x\neq 0$ ニ對シテ $f(x)\geqq f(\|x\|\cdot\varepsilon\cdot x_0)=\|x\|\cdot\varepsilon\cdot f(x_0)>0$ デアルカラ $V(x)=\frac{x}{f(x)}$ トオケバ $V(x)$ ハ $S_\varepsilon-(0)$ ヲKニウツス連続寫像ガ且ツ $f(x)\geqq\delta_\varepsilon>0$ ナルトコロデハ一様連続デアル。ヨッテ今 S_ε ニテ定義サレタ operator $W_\varepsilon=V\cdot U_\varepsilon T$ ヲ考ヘレバ W_ε ハKヲKニウツス連続寫像デ、シカモKニテ completely continuous デアル. コレハTガ completely continuous ナルコト及ビ補助定理3,5ヨリワカル。

補助定理4ニヨリ Kハ convex 且ツ有界デアルカラ

KトWεトニ對シテ Schauder ノ不動点定理[2]ガ使ヘテ $W_\varepsilon(x_\varepsilon)=x_\varepsilon$ トナル如キ $x_\varepsilon\in K$ ガ存在スル。即チ $U_\varepsilon T(x_\varepsilon)=\lambda_\varepsilon x_\varepsilon,\ \lambda_\varepsilon>0$ ナル如キ $x_\varepsilon\in K$ ガ存在スル。更ニ U_ε ノ定義ニモドレバ

$$T(x_\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\|T(x_\varepsilon)\|\cdot x_0=\lambda_\varepsilon x_\varepsilon,\quad \lambda_\varepsilon>0$$

トナル如キ $x_\varepsilon\in K\subset S_\varepsilon$ ガ存在スル。此ノ如キ $\lambda_\varepsilon, x_\varepsilon$ ハ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ存在スルカラ $\varepsilon_n\to 0$ ナル ε_n ヲトリ、コレニ對應スル $\lambda_\varepsilon, x_\varepsilon$ ヲ夫々 λ_n, ε_n ニテ表ハスト

$$(*)\quad T(x_n)+\frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}\|T(x_n)\|\cdot x_0=\lambda_n x_n,\ \lambda_n>0,$$

$x_n\in K.\subset S_\varepsilon$ ヨッテ今モシ $0<C_0\leqq\lambda_n\leqq C_1<\infty,\ n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キ C_0, C_1 ノ存在ガ証明サレレバ

$T(x_{n_\nu})\longrightarrow x_\infty,\ \lambda_{n_\nu}\to\lambda_\infty,\ C_0\leqq\lambda_\infty\leqq C_1$ ナル如キ $\{n_\nu\},\ x_\infty\in S,\ \lambda_\infty$ ガ存在スル．コノ x_∞, λ_∞ ガ

$$T(x_\infty)=\lambda_\infty x_\infty$$

ヲ満足スルコトハ (*) ニ T ヲ施シテ得ラレル。

$$T\,T(x_n)+\frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}\|T(x_n)\|\cdot T(x_0)=\lambda_n T(x_n)$$

ニテ $n_\nu\to\infty$ ナラシメレバワカル．（$\|T(x_n)\|$ ガ有界，$\varepsilon_n\to 0$ ナルコトニ注意）．

シカモ $x_\infty>0$ デアル。何トナレバ先ヅ $1=f(x_n)\leqq\|x_n\|\cdot\|f\|$ ヨリ $\|x_n\|\geqq\frac{1}{\|f\|}$，次ニ $x_n\geqq\varepsilon\|x_n\|\cdot x_0$ ヨリ $T(x_n)\geqq\varepsilon\|x_n\|\cdot T(x_0)\geqq\varepsilon\cdot\frac{1}{\|f\|}\cdot T(x_0)>0$ ヨッテ又

(2) J. Schauder: Der Fixpunktsatz in Funktionalraümen, Studia Math., 2(1930), 171—180

$$x_0 \geqq S \cdot \frac{1}{\|f\|} T(x_0) > 0.$$

此ノ如クシテ定理ノ証明ニハ次ノ補助定理ヲ証明スレバ十分ナコトガ分ル.(C_1ノ存在ハ明カデアル).

$\boxed{\text{補助定理6}}$ $Tx + \alpha x_0 = \lambda x$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, $x \in S'_\varepsilon$ ガ成立スレバ $C_0 \leqq \lambda$ トナル。

証明: $Tx + \alpha x_0 = \lambda x$ ヨリ $\alpha x_0 \leqq \lambda x$. Tヲ両辺ニ施シテ $\alpha T x_0 \leqq \lambda T x$.

然ルニ $Tx_0 \geqq C_0 x_0$, $Tx = \lambda x - \alpha x_0$ ナル故

$$\alpha C_0 x_0 \leqq \lambda(\lambda x - \alpha x_0) \leqq \lambda^2 x$$

更ニ両辺ニ Tヲ施シテ

$$\alpha C_0^2 x_0 \leqq \alpha C_0 T x_0 \leqq \lambda^2 T x \leqq \lambda^2(\lambda x - \alpha x_0) \leqq \lambda^3 x$$

此ノ如クニシテ一般ニ

$$\alpha C_0^{n-1} x_0 \leqq \lambda^n x$$

ヨッテ今モシ $C_0 > \lambda$ ナラバ

$$\alpha x_0 \leqq \frac{\lambda^n}{C_0^{n-1}} x$$

ヨリ $n \to \infty$ ナラシメレバ右辺 $\to 0$ *strongly*. ヨッテ

$$\alpha x_0 \leqq 0$$

コレハ $\alpha x_0 > 0$ ニ矛盾スル。ヨッテ $C_0 \leqq \lambda$.

コレニヨッテ補助定理6. シタガッテ又定理ノ証明ガ完結スル.