

767. Additive number theory, Markoff chain, 問題への応用

角谷 静夫 (阪大)

可附番無限個、可能+状態=閉スル Markoff chain
ヲ論ズル=嘗ツテ我々が遭遇シタノハ次ノ問題ヲアツタ!!⁽¹⁾

real number, 系列 $\{p^{(n)}\}$ ($n=1, 2, \dots$) が

(1) $0 \leq p^{(n)} \leq 1, \quad n=1, 2, \dots$

(2) $p^{(m+n)} \geq p^{(m)} p^{(n)}, \quad m, n=1, 2, \dots$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (p^{(1)} + p^{(2)} + \dots + p^{(n)}) = \alpha > 0$

(4) $p^{(n)} > 0$ トル如キ n ノ集合ヲ \mathcal{M} トスレバ

\mathcal{M} ノ最大公約数 = 1

ヲ満足スルトキ、コレダケノ條件カラ $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)} > 0$ が
結論出來ルカ?

次ニコノ結論が可能ナルコトヲ証明スル。

先ヅ (4) = テ定義サレタ \mathcal{M} が十分大キイ integer ヲ
スズテ含ムコトヲ証明スル。即チ

補助定理

positive integer, 集合 \mathcal{M} が

(5) $m \in \mathcal{M}, n \in \mathcal{M}$ トラバ $m+n \in \mathcal{M},$

(1) 本号, 吉田氏, 談話参照。

(6) \mathcal{M} の最大公約数 = 1

ヲ満足スレバ、アル integer n_0 ガ定マツテ $n \geq n_0$ ナ
ルスベテ 1 integer n ハ $\mathcal{M} =$ 属スル。

ナレコトヲ証明スル。 \mathcal{M} の最大公約数が 1 ナレコトヨリ
 $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathcal{M}$ 及ビ正又ハ負ノ integer $l_1, l_2,$
 \dots, l_k ガ定マツテ

$$l_1 n_1 + l_2 n_2 + \dots + l_k n_k = 1$$

トナル。 $\max_{1 \leq i \leq k} |l_i| = L$ トオキ $n_3 = n_1 \cdot L \cdot (n_1 + n_2 + \dots$

$\dots + n_k)$ トオケ。明カ = $n_0 \in \mathcal{M}$ ナアル。 $n \geq n_0$ ナル
任意ノ integer n ハ $n_0 + m + l n_1$, $0 \leq m \leq n_1 - 1$,
 $l = \text{integer} \geq 0$, ト云フ形 = 書クコトガ出来ルカラ,
 $n \geq n_0$ ナルスベテ 1 integer n ガ $\mathcal{M} =$ 属スルコトヲ
示ス = ハ $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n_0 + (n_1 - 1)$ ガ何レ
モ $\mathcal{M} =$ 属スルコトヲ示セバ十分ナル。

シカレ = コレハ

$$n_0 + m = n_1 \cdot L (n_1 + n_2 + \dots + n_k) + m (l_1 n_1 + l_2 n_2 + \dots + l_k n_k)$$

$$= (n_1 L + m l_1) n_1 + (n_1 L + m l_2) n_2 + \dots + (n_1 L + m l_k) n_k$$

トナリ $0 \leq m \leq n_1 - 1$ = 對シテ $n_i L + m l_i \geq 0$, $i = 1, 2,$
 \dots, k ナルカラ明カナル。

$\gamma R = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)} > 0$ ナルコトノ証明 = ヲツル / ナアルガ

ソノ前 = 二三ノ準備ヲスル。

一般ノ *positive integer* ノ集合 \mathcal{O} ヲ考ヘル。 n ヲ起ヘ +1 *positive integer* ナ \mathcal{O} = 属スル ε_1 ノ数 (カズ) ナ $A(n) = \text{ヨツテ表ハス}$ 。 $0 \leq A(n) \leq n$ ナアル。

$n = 1, 2, \dots$ = 對スル $\frac{A(n)}{n}$ ノ下限 $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = \text{非ズ} \right)$

ヲ $D^*(\mathcal{O}) = \text{ヨツテ表ハス}$ 。

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}$ ナ $\underline{D}(\mathcal{O}) = \text{テ表ハス}$ 。 (2)

$0 \leq D^*(\mathcal{O}) \leq \underline{D}(\mathcal{O}) \leq 1$ ナアル。 特ニ \mathcal{O} ガ 1 ヲ含マ + ケレバ $A(1) = 0$ トナルカラ $D^*(\mathcal{O}) = 0$ トナル。 又 $D^*(\mathcal{O}) = 1$ トナルハ 各ニ $n = \text{對シテ}$ $A(n) = n$ トナルトキ、即チ \mathcal{O} ガ *positive integer* 全体ノ集合ト一致スルトキ、且ソノ時 = 限ル。

次 = 二ツノ *positive integer* ノ集合 \mathcal{O}, \mathcal{L} = 對シテ $a, b, a+b$ ($a \in \mathcal{O}, b \in \mathcal{L}$) ナル如キ形ノ *positive integer* ノ集合ヲ $\mathcal{O} \oplus \mathcal{L} = \text{テ表ハス}$ 。 $\mathcal{O} \oplus \mathcal{L} \supseteq \mathcal{O} + \mathcal{L}$ ナアルガ必ずシニ等号ハ成立シナイ。 ($\mathcal{O} + \mathcal{L}$ ハ集合トシテノ和ヲ表ハス)。

更 = 一般 = *positive integer* ノ集合 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_k = \text{對シテ}$ $e_1 a_1 + e_2 a_2 + \dots + e_k a_k, e_i = 0$ $\text{or } 1, a_i \in \mathcal{O}_i, i = 1, 2, \dots, k$ ナル如キ形ノ

$$(2) \quad \overline{D}(\mathcal{O}) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}}, \quad D(\mathcal{O}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} \quad (\text{左辺カ存}$$

在スルトキ) 等モ定義サレルガコレヲハ必要ナシ。

integer 全体、集合ヲ $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \dots \oplus \alpha_k = \tau$ 表ハス。
然レトキハ次、Khintchine、定理ガ成立スル：⁽³⁾

$$D^*(\alpha_i) \geq \alpha, \quad i=1, 2, \dots, k \text{ 十ラバ}$$

$$D^*(\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \dots \oplus \alpha_k) \geq \min(1, k\alpha).$$

特ニ $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$ 十レトキハ

$$D^*(\underbrace{\alpha \oplus \alpha \oplus \dots \oplus \alpha}_{k \text{ 個}}) \geq \min(1, kD^*(\alpha))$$

(3) A. Khintchine: Zur additiven Zahlentheorie,
Recueil Math, 39(1932).

一般ニ

$$D^*(\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \dots \oplus \alpha_k) \\ \geq \min(1, D^*(\alpha_1) + D^*(\alpha_2) + \dots + D^*(\alpha_k))$$

ガ豫想カレテキルガ証明ハ未ダ出来テキナシ。

コノ問題ニ関シテハ Khintchine、ヨリモ精シイ結果
ガ A. Besicovitch, I. Schur, A. Brauer 等ニヨツ
テ得ラレテホル。シカシコノデハ上記ノ Khintchine
ノ結果ヲ十余ガアル。

A. Brauer: Über die Dichte der Summe
von Mengen positiver ganzer Zahlen, I,
Annals of Math, 39(1938).

E. Landau: Über einige neuere Fortschritte
der additiven Zahlentheorie, Cambridge
Tracts, No. 35. 1937.

が成立スル。証明ハ脚註(3)ノ Khintchine ノ原論文又ハ Landau ノ書物ヲ見ラレタイ。

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)} > 0 \text{ トルコトノ証明}}$$

先ツ $p^{(n)} \geq \frac{\alpha}{2}$ + n positive integer n ノ集合 \mathcal{N} ヲ考ヘル。但シ α ハ條件(3) = ヲツテ定マルモノナラズル。條件(3) ヲリ $\underline{D}(\mathcal{N}) \geq \frac{\alpha}{2-\alpha} > 0$ ナ得ラレル。何トナレバ n ヲ超ヘタイ integer n \mathcal{N} = 属スルモノノ數(カズ) $A(n)$ トスレバ

$$\begin{aligned} \frac{p^{(1)} + p^{(2)} + \dots + p^{(n)}}{n} &\leq \frac{A(n) + (n - A(n)) \cdot \frac{\alpha}{2}}{n} \\ &= \frac{\alpha}{2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{A(n)}{n} \end{aligned}$$

ヨツテ $n \rightarrow \infty$ トラシメレバ

$$\alpha \leq \frac{\alpha}{2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \underline{D}(\mathcal{N})$$

$$\frac{\alpha}{2-\alpha} \leq \underline{D}(\mathcal{N})$$

1ハ \mathcal{N} = 属スルカドツカワカラタイ。($p^{(n)} \geq \frac{\alpha}{2}$ トナルカドツカワカラズ)。ヨツテ $D^*(\mathcal{N}) = 0$ トナルカモ知レタイ。

シカシ $\mathcal{N} = 1$ ヲ加ヘズモノヲ $\mathcal{N}^* = \mathcal{N} \cup \{1\}$ ヲ表ハセバ

$D^*(\mathcal{N}^*) > 0$ トナル。何トナレバ \mathcal{N} が 1ヲ含ム場合ハ明カ。

\mathcal{N} が 1ヲ含マタイトキハ n ヲ超ヘタイ positive integer n $\mathcal{N}^* =$ 属スルモノノ數(カズ) $A^*(n)$ ハ

$A^*(n) = A(n) + 1$ ヲ満足スル。ヨツテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^*(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} \geq \frac{\alpha}{2-\alpha} > 0$$

故 = 十分 n^* 大キク トレバ $n \geq n^* + 1$ トキ

$$\frac{A^*(n)}{n} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2-\alpha} > 0. \text{ 然ル } = n = 1, 2, \dots, n^* - 1$$

$$= \text{對シテハ } \frac{A^*(n)}{n} \geq \frac{1}{n^* - 1} + \text{ル故}$$

$$\frac{A^*(n)}{n} \geq \min\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2-\alpha}, \frac{1}{n^* - 1}\right) > 0. \quad \exists \text{ ヲツテ}$$

$$D^*(\mathcal{N}^*) > 0.$$

從ツテ Khintchine, 定理, 特別, 場合ヨリ, k_0 大

十分大キク ($k_0 > \frac{1}{D^*(\mathcal{N}^*)}$) トレバ

$$D^*(\underbrace{\mathcal{N}^* \oplus \mathcal{N}^* \oplus \dots \oplus \mathcal{N}^*}_{k_0 \text{ 個}}) = 1$$

即チ $\underbrace{\mathcal{N}^* \oplus \mathcal{N}^* \oplus \dots \oplus \mathcal{N}^*}_{k_0 \text{ 個}}$ ハ positive integer 全

体ノ集合ト一致スル。ヨツテ任意ノ integer n ハ

$$n = n_1^* + n_2^* + \dots + n_p^*, \quad n_i^* \in \mathcal{N}^*.$$

$$i = 1, 2, \dots, p; \quad 1 \leq p \leq k_0$$

ト云フ形ニ書ケル。 $n_1^*, n_2^*, \dots, n_p^*$ ノ中ノ 1 = 等シイ

ノ数 (カキ) ヲ r トスレバ

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_{p-r} + r, \quad n_i \in \mathcal{N},$$

$$i = 1, 2, \dots, p-r.$$

$$0 \leq r \leq p \leq k_0$$

トナレ。 $n' = n_1 + n_2 + \dots + n_{p-r}$ トナレバ条件 (2)

ヨリ

$$p^{(n')} \geq p^{(n_1)} \cdot p^{(n_2)} \cdot \dots \cdot p^{(n_{p-r})} \geq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p-r} \geq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k_0}$$

ヨツテ任意 = positive integer $n > k_0$ ヲ與ヘレバ
 $p^{(n)}, p^{(n+1)}, \dots, p^{(n-(k_0-1))}$, ヲナレバ少クトモ一ツ

$$\text{ハ} \geq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k_0} > 0 \text{ トナレ。}$$

今補助定理 = テ定メツク integer n_0 ヲトリ

$$\min \left(p^{(n_0)}, p^{(n_0+1)}, \dots, p^{(n_0+(k_0-1))} \right) = \lambda_0$$

トナレバ $\lambda_0 > 0$ ナレ。

スベテノ $n \geq n_0 + k_0$ = 對シテ $p^{(n)} \geq \beta > 0$ トナレ如

キ $\beta > 0$ ナレコトヲ示サ。

$n - n_0 > k_0$ ナレ故 $p^{(n-n_0)}, p^{(n-n_0-1)}, \dots, p^{(n-n_0-(k_0-1))}$

ノ少クトモ一ツハ $\geq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k_0} > 0$. コレヲ $p^{(n-n_0-i_0)}$ ト

セヨ。 ($0 \leq i_0 \leq k_0 - 1$) . 然レトキハ条件 (2) ヲリ

$$p^{(n)} \geq p^{(n-n_0-i_0)} \cdot p^{(n_0+i_0)} \geq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k_0} \cdot \lambda_0 = \beta$$

トナレ。 $\beta = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k_0} \cdot \lambda_0$. ハ $n = \infty$ 無関係ナレリ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)} \geq \beta > 0.$$