772. 群ニ於ケルMaßトTopologieノ関係ニツイテ（A. Weilノ定理ノ証明）I

小平　邦彦（東大）

数年前ノC. R. ニ於テA. Weilハ群ノMaßトTopologieノ間ニ密接ナル関係ガアルコトヲ指摘シテヰル*) —— 群GニTopologieガ與ヘラレタトキ，ソノTopologieニ関シテ $y^{-1}x$ ガ連續ナラバ，吾々ハGハTopologische Gruppeデアルトイフノデアッタ，カソノ如キTopologieハGノ群トシテノ演算ト或ル関聯ヲ有スル、コゝニ於テTopologieノ代リニMaßヲ考ヘタナラバドウナルデアラウカ？一般ニ，Neumannニ從ッテ，Maßヲ有スル空間ノAbbildungハ，meßbarナ集合ノUrbildガ常ニmeßbarナルトキmeßbarデアルトイフコトニスレバ，$y^{-1}x$ ノStetigkeitニ相當スルモノハ，$G \times G$ ヲGヘabbildenスルAbbildung $y^{-1}x$ ノMeßbarkeitデアラウ。Weilハ $y^{-1}x$ ガmeßbarデアルトイフコトヲ，$f(x)$ ガmeßbarナ函数ナラバ $f(y^{-1}x)$ モmeßbarデアル。トイフ形ニ言ヒ現ハシ，カクノ如キ性質ヲモツGノMaßニハein-eindeutigニ $y^{-1}x$ ガ連續ナルTopologieガ對應シ，コノTopologieニ関スルGノ„Komplettierung"ヲ $\overline{G}$ トスレバ，$\overline{G}$ ハim Kleinen kompaktナ群デアッテ，Gニ豫ジメ與ヘラレテアッタ

*) C. R. Tom. 202, 1147 (1936)

Maß ハ $\overline{G}$ ノ Haar ノ Maß ト一致スル，ト主張スルノデアルガ，コノ証明ハ未ダ発表サレナイ様デアル。

吾々ハ Separabilität ノ假定ノ下ニ於テデハアルケレドモ，兎モ角コノ一ツノ証明ヲ與ヘルコトガ出來，又コレニ関係シタ二三ノ定理ヲ証明スル事ガ出來タカラ，之ヲコヽニ書イテ見タイト思フ。

先ヅ §1. ニ於テ必要ナ概念ヲ説明シ，§2 ニ於テ Haar ノ maß ニ関スル主要ナ定理トソノ証明ヲ述ベ，§3 ニ於テ Haar ノ Maß 以外ニモ，Haar ノ Maß ニヨツテ，$y^{-1}x$ ガ meßbar デアルヤウナ links-invariant ナ Maß ガ induzieren サレルコトヲ述ベル。コヽデ吾々ハ $y^{-1}x$ ガ meßbar ナル links-invariant ナ Maß ヲ Weil ノ Maß ト名付ケル。§4 ニ於テ Weil ノ Maß ガ Haar ノ Maß ニヨツテ induzieren サレタ Maß ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ヲ述ベル。コレハ或ル意味デ Haar ノ Maß ノ Eindeutigkeitssatz ノ拡張デアルト考ヘラレル。§5 ニ於テハ先ヅ Maß ニ関スル Separabilität ノ定義ヲ述ベ，separabel ナル Weil ノ Maß ハ，eindeutig ニ定マル im Kleinen kompakt ナ群ノ Haar ノ Maß ニヨツテ induzieren サレタ Maß ナルコトヲ証明スル。コレハ即チ Weil ノ定理ニ他ナラナイ。§6 ニ於テ以上ノ結果ヲ，シバラク Haar ノ Maß カラ離レテ，separabel ナ Weil ノ Maß ト separabel links-invariant ナ allgemeine Metrik ノ間ノ関係トシテ考察スル。コヽデ allgemeine Metrik トイフノハ，三角不等式ハ成立スル

ケレドモ，必ズシモTrennungsaxiomヲ満足シナイmetrikノコトデアル。ユークリッド空間ノMetrikトLebesgueノMaßニ関シテハ，Borel setハmeßbarデアッテ，逆ニmeßbarナ集合ニ對シテハコレトMaß 0ヲ除イテ一致スルBorel集合ガ存在スルコトガ容易ニ分ル。吾々ハ一般ニ群ノseparabelナWeilノMaßトseparabel links-invariantナallgemeine MetrikノIII間ニカクノ如キ関係ガ存在スルトキ，コノMetrikハMaßニ属スルMetrikデアルトイフコトヽシ，separabelナWeilノMaßニハコレニ属スルMetrikガ存在シテ一意的ニ定マルコト，逆ニseparabelナWeilノMaßハコレニ属スルMetrikヲ與ヘレバeindeutigニ定マルコトヲ証明スル。又，separabelナルWeilノMaßトソレニ属スルMetrikニ関シテハ，„density"トシテ„upper density"ノミヲ考ヘルナラバ，所謂"density theorem"及ビコレニ相當スルÜberdeckungssatzガ成立スルコトヲ証明シ、逆ニ，separabelナWeilノMaßトseparabel links-invariantナallgemeine Metrikニ関シテ"density theorem"，又ハÜberdeckungssatzガ成立スルナラバ，コノMetrikハseparabelナWeilノMaßニ属スルMetrikデナケレバナラナイコトヲ示ス。最後ノ§7ニ於テ，WeilノMaßヲ擴張スル問題ヲ考察シ，又コレニ関スル例ヲ述ベル。

§1. Einleitung

1. *Maß*. 空間Rノスベテノ部分集合Aニ對シテ定義サレタ有限又ハ無限大ノ値ヲトル nicht-negativ ナ集合函數 $m^*(A)$ ガ次ノ二ツノ條件1), 2)ヲ滿足スルトキ, $m^*(A)$ ヲRノ Carathéodory ノ äußeres Maß トイフ:

1) $A \subset B$ ナラバ $m^*(A) \leqq m^*(B)$

2) $m^*(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots\cdots) \leqq m^*(A_1) + m^*(A_2) + \cdots\cdots$

コノトキ, Rノ部分集合Aガ, スベテノ $X \subset R$ ニ對シテ

$$m^*(X) = m^*(X \frown A) + m^*(X - A)$$

ナル條件ヲ滿足スルナラバ, Aハ *m*-meßbar デアルトイヒ, $m^*(A)$ ヲ $m(A)$ ト書イテ, $m(A)$ ヲAノ Maß トヨブ。

Rノ任意ノ部分集合Xニ對シテ必ズ

$$A \supset X, \quad m(A) = m^*(X)$$

ナル *m*-meßbar ナ部分集合Aガ存在スルトキ m^* ハ regular デアルトイハレル。

Maß ノ定義. 吾々ハ regular[1] デアッテ, 條件:

(a) Rハ高々可附番個ノ有限ナ Maß ヲ有スル *m*-meßbar ナ部分集合ノ和デアル:

$$R = \sum_{j=1}^{\infty} A_j, \quad m(A_j) < +\infty;$$

---

1) m^* ガ regular デナイトキニハ, *m*-meßbar ナ集合ノ Maß ヲ変ヘナイデ, m^* ヲ regular ナ äußeres Maß ニ直スコトガ出來ル。

ヲ滿足スル Caratheodory ノ äußeres Maß m^* ヲ，äußeres Maß，或ハ單ニ R ノ Maß トイフコトニスル。

R デ定義サレタ複素數値ヲトル函數 $f(x)$ ハ，複素平面上ノ任意ノ開集合 O ノ Urbild $f^{-1}(O)$ ガ常ニ m-meßbar ナルトキ，m-meßbar デアルトイフ。m-meßbar ナ函數ニ對シテハ "Lebesgue" 積分ヲ考ヘルコトガ出來ル。コレヲ

$$\int_A f(x)\, m(dx)$$

デ現ハス。但シ A ハ積分範囲デアル。

$$\int_A |f(x)|\, m(dx) < +\infty$$

ナルトキ $f(x)$ ハ A デ summierbar デアルトイフ。コノトキ

$$\int_A f(x)\, m(dx)$$

ハ"絶對收斂"デアル。

2. Borel 族. 吾々ハ G ノ部分集合族 $\mathfrak{F}$ ガ次ノ條件 1), 2), 3) ヲ滿足スルトキ，$\mathfrak{F}$ ヲ Borel 族トヨブコトニスル：

1) $A, B \in \mathfrak{F}$ ナラバ $A+B$, $A-B$, $A \frown B \in \mathfrak{F}$.

2) A_j $(j=1,2,\text{-----}) \in \mathfrak{F}$ ナラバ $\prod_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{F}$.

3) $R = \sum_{j=1}^{\infty} A_j$，$A_j \in \mathfrak{F}$ ナル A_j ガ存在スル。

$\mathfrak{F}$ ガ Borel 族ナルトキ $\mathfrak{F}$ ニ屬スル集合ノ高々可附番個ノ和ノ全体ハ亦 Borel 族ヲ作ル。コレヲ $\tilde{\mathfrak{F}}$ デ現ハス。記号デ書ケバ

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \left(X;\ X = \sum_{j=1}^{\infty} A_j,\ A_j \in \mathfrak{F}\right)^{2)}$$

$\tilde{\mathfrak{F}}$ ニ於テハ，明ラカニ

$$A_j = (j = 1, 2, \cdots\cdots) \in \tilde{\mathfrak{F}} \text{ ナラバ } \sum_{j=1}^{\infty} A_j \in \tilde{\mathfrak{F}}$$

ガ成立スル。

R ノ函数 $f(x)$ ハ開集合 O ノ f ニヨル Urbild $f^{-1}(O)$ ガ $\tilde{\mathfrak{F}}$ ニ含マレルトキ，$\mathfrak{F}$－meßbar デアルトイフ。

m^* ガ R ノ Maß ナルトキ，有限ノ Maß ヲモツ m－meßbar ナ部分集合ノ全体ハ Borel 族ヲ作ル。コレヲ (m) デ現ハス：

$$(m) = (A;\ m(A) < +\infty)$$

然ルトキハ (m)－meßbar ハ m－meßbar ト一致スル。

Borel 族 $\mathfrak{F}$ ニ於テ有限ナ値ヲトル nicht-negativ, total additiv ナル集合函数 μ ガ與ヘラレタトキ，

$X \subset R$ ニ對シテ，

---

2) 一般ニ $\mathfrak{E}$ ナル性質ヲモツ元ノ全体ヨリ成ル集合ヲ $(x;\ \mathfrak{E}(x))$ ナル記号デ現ハスコトニスル。コレハ Neumann ノ記号デアル。

$$\mu^*(X) = \underline{\text{fin}} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \quad \sum_{j=1}^{\infty} A_j \supset X, \ A_j \in \mathfrak{F};$$

デ定義サレタ μ^* ハ明ラカニ R ノ Maß デアル．μ^* ヲ μ ニヨッテ定メラレタ R ノ Maß ト名付ケル。

total additiv ナ集合函数 $\mu = \mu(A)$; $A \in \mathfrak{F}$ ハ

$$\mathfrak{F} \subset (m). \quad m(A) = 0 \ \text{ナラバ} \ \mu(A) = 0$$

ナル條件ヲ満足スルトキ m-absolut stetig デアルトイフ。コノトキ

Nikodym ノ定理．$\mu = \mu(A)$, $A \in \mathfrak{F}$ ガ m-absolut stetig ナルトキハ，μ ハ $\mathfrak{F}$-meßbar ナ函数 $\varphi(x)$ ニヨッテ

$$\mu(A) = \int_A \varphi(x)\, m(dx), \qquad A \in \mathfrak{F}$$

ナル形ニ現ハサレル．$\varphi(x)$ ハ m-Maß 0 ノ点ヲ除ケバ μ ニヨッテ eindeutig ニ定マル。[3)]

ガ成立ツ。

3. Fubini ノ定理．m^* ヲ空間 R ノ Maß トスル．コノトキ cartetisches Produkt R×R ノ任意ノ部分集合 Γ ニ對シテ，$mm^*(\Gamma)$ ヲ次ノ如ク定義スル：

$$mm^*(\Gamma) = \underline{\text{fin}} \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)\, m^*(B_j),$$

$$\sum_j A_j \times B_j \supset \Gamma;$$

但シコヽデ $\underline{\text{fin}}$ ハ，$\sum_j A_j \times B_j \supset \Gamma$ ナルスベテノ A_j,

3) 証明ハ Saks: Theory of Integral; P. 32–36

$B_j\ (\subset R)$ ニツイテトルモノトスル。mm^*ハ空間$R \times R$ノ*Maß*デアル。コレヲ *Produkt-maß* ト名付ケル。明ラカニA, $B \subset R$ガ*m-meßbar*ナルトキハ$A \times B$ハ*mm-meßbar*デアッテ

$$mm(A \times B) = m(A)\,m(B).$$

Rノ二変数ノ函数$f(x, y)$ハ$R \times R$ノ上ノ函数ト考ヘラレル。$R \times R$ノ函数トシテ$f(x, y)$ガ*mm-meßbar*ナルトキ，二変数ノ函数$f(x, y)$ハ*m-meßbar*デアルトイヒ，ソノ積分ヲ

$$\int f(x, y)\, mm(d(x, y))$$

又ハ二重積分：

$$\iint f(x, y)\, m(dx)\, m(dy)$$

デ現ハス。然ルトキハ

*Fubini*ノ定理．二変数ノ函数$f(x, y)$ガ*mm-meßbar*ナルトキハ，*m-Maß* 0ノxヲ除ケバ，$f(x, y)$ハyノ函数トシテ*m-meßbar*デアル。$f(x, y)$ガ$A \times B$デ*summierbar*ナルトキハ，Aノ*m-Maß* 0ノxヲ除ケバ，$f(x, y)$ハyニツイテBデ*summierbar*デアッテ，xノ函数

$$\int_B f(x, y)\, m(dy)$$

ハAデ*summierbar*，且

$$\iint_{A\times B} f(x,y)\,m(dx)\,m(dy)$$
$$= \int_A m(dx) \int_B f(x,y)\,m(dy)$$

ガ成立スル。従ツテ又

$$\int_A m(dx) \int_B f(x,y)\,m(dy)$$
$$= \int_B m(dy) \int_A f(x,y)\,m(dx)$$

4. Hilbert空間. m^* ヲ R ノ Maß トスル、コノトキ

$$\int_R |f(x)|^2\,m(dx) < +\infty$$

ナル m-meßbar ナ函数 $f(x)$ ノ全体ハ

$$(f, g) = (f, g)_m = \int_R f(x)\,\overline{g(x)}\,m(dx)$$

ヲ inneres Produkt トスル vollständig ナ, 必ズシモ separabel デハナイ〝Hilbert 空間〟ヲ作ル. コレヲ $\mathfrak{H}_R$, 或ハ $\mathfrak{H}_R^{(m)}$ デ現ハス. $\mathfrak{H}_R^{(m)}$ ノ元 f ノ〝長サ〟ヲ $\|f\|$, 或ハ $\|f\|_m$ ト書ク:

$$\|f\| = \|f\|_m = \sqrt{(f,f)_m}$$

一般ニ R ノ部分集合 A ノ〝charakteristische Funktion〟ヲ $e_A(x)$ デ現ハス: スナハチ

$$e_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ ノトキ} \\ 0 & \text{然ラザルトキ} \end{cases}$$

然ルトキハ, $A, B \in (m)$ ナラバ明ラカニ

$$\| e_A - e_B \| = m(A-B) + m(B-A)$$

コレヲ m ニヨッテ定メラレルAトBノ距離ト名付ケ $d_m(A,B)$ ヲ現ハス：

$$d_m(A,B) = m(A-B) + m(B-A)$$
$$= \| e_A - e_B \|_m .$$

然ルトキハ

定理1. Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_R^{(m)}$ ガ separabel ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ，Borel 族 (m) ガ距離 d_m ニ關シテ separabel ナルコトデアル。

証明[4] ハ殆ンド明白デアル。

---

4) 充分ナルコトノ証明ハ，例ヘバ Neumann: Allgemeine Eigenwert theorie Hermitischer Operatoren (Math. Ann. 102) 參照。

必要ナコトハ例ヘバ次ノ如クスレバ分ル：$f_j(x)$ $(j=1,2,3,\text{-----})$ ヲ $\mathfrak{H}_R$ デ überall dicht ナ可附番集合トシ，$|f_j(x)-1| \leq \frac{1}{2}$ ナル x ノ集合ヲ A_j トスル。$A \in (m)$ 及ビ $\varepsilon > 0$ ガ任意ニ與ヘラレタトキ

$$\| e_A - f_j \|^2 < \varepsilon$$

ナル f_j ガアル。然ルニ

$$\| e_A - f_j \|^2 = \int_A |1-f_j(x)|^2 m(dx) + \int_{G-A} |f_j(x)|^2 m(dx)$$

デアッテ

$$x \in A - A_j \quad \text{ナラバ} \quad |1-f_j(x)| \geq \frac{1}{2},$$

$$x \in A_j - A \quad \text{ナラバ} \quad |f_j(x)| \geq \frac{1}{2}$$

（次頁ヘツヅク）

5. Beschränkte Operatoren. $\mathfrak{H}$ ヲ separabel ナ Hilbert空間, $\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ ヲ $\mathfrak{H}$ ノ beschränkte Operatoren 全体ノ作ル Ring トスル。$\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ ノ元 P_0 ニ對シテ,

$$\mathfrak{U}(P_0; f_1, \cdots\cdots, f_k, \varepsilon)$$
$$= (P;\ \|(P-P_0)f_j\| < \varepsilon,\ 1 \leqq j \leqq k)$$

ヲ, $f_1, \cdots\cdots, f_k$ ニヨツテ定メラレル P_0 ノ ε-Umgebung ト名付ケル。コノ $\mathfrak{U}(P; f_1, \cdots\cdots, f_k, \varepsilon)$ ノ全体ヲ Umgebungssystem トシテ定メラレル $\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ ノ Topologie ヲ stark ナ Topologie トヨブ。$\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ ハコノ Topologie ニ関シテ vollständig ナル topologischer linearer Raum デアル。[5)]

$\mathfrak{H}$ ノ unitär ナ Operator ヲ U, V, etc. デ現ハシ, unitäre Operatoren 全体ノ作ル群ヲ $\mathbb{U}_{\mathfrak{H}}$ デ現ハス。明カニ $\mathbb{U}_{\mathfrak{H}} \subset \mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ デアル。

定理2. $\mathbb{U}_{\mathfrak{H}}$ ハ stark ナ Topologie ニ関シテ abzählbare Basis ヲ有スル vollständig ナ topologische

(脚註4ノツヾキ)

デアルカラ

$$\frac{1}{4}m(A-A_j)+\frac{1}{4}m(A_j-A)<\varepsilon$$

スナハチ

$$d_m(A, A_j) < 4\varepsilon$$

故ニ A_j $(j=1,2,3,\cdots\cdots)$ ハ (m) デ d_m-überall dicht デアル。

5) Neumann: Topologicaly complete linear space (Trans. Vol. 37) 参照。

Gruppe デアル。$\psi_j\ (j=1,2,\cdots\cdots)\in \mathfrak{h}_y$ ヲ

$$[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots\cdots] = \mathfrak{h}_y{}^{6)} \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\|\psi_j\| < +\infty$$

ナル元トスレバ

$$\rho_\psi(U,V) = \sum_{j=1}^{\infty}\|(U-V)\psi_j\|, \quad U, V \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{h}_y}$$

ニヨッテ定義サレタ ρ_ψ ハ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{h}_y}$ ノ *links-invariant* ナ *Metrik* デアッテ, ψ_j ノ選ビ方ニ関係ナク $\mathfrak{U}_{\mathfrak{h}_y}$ ノ *stark* ナ *Topologie* ヲ與ヘル. 從ッテ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{h}_y}$ ハ *Metrik* ρ_ψ ニ関シテ *vollständig* デアル。[7)]

証明 I. $U\cdot V$ ハ連続デアル。何トナレバ

---

6) $[\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots]$ ハ $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots\cdots$ ヲ含ム最小ノ *abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit* ヲ現ハス。

7) 一般ニ *topologische Gruppe* G ニ於テ

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ k\to\infty}} a_j^{-1} a_k = 1$$

ナル *Folge* $a_j\ (j=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ *Fundamentalfolge* ト名付ケ, *Fundamentalfolge* ガ必ズ収斂スルトキ, G ハ *vollständig* デアルトイフ。

G ノ *Topologie* ガ *links-invariant* ナ *Metrik* $\rho(a,b)$ ニヨッテ與ヘラレテヰルトキニハ

$$\rho(a_j^{-1}a_k, 1) = \rho(a_k, a_j)$$

デアルカラ, G ノ *Vollständigkeit* ハ *Metrik* ρ ニ関スル *Vollständigkeit* ト一致スル。

$$\mathfrak{U} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{U}_0;\ V_0 f_1, \cdots\cdots, V_0 f_k,\ \varepsilon),$$
$$V \in \mathfrak{U}(V_0;\ f_1, \cdots\cdots, f_k,\ \varepsilon)$$

トスレバ

$$\|(\mathfrak{U}V - \mathfrak{U}_0 V_0) f_j\|$$
$$\leqq \|\mathfrak{U}(V - V_0) f_j\| + \|(\mathfrak{U} - \mathfrak{U}_0) V_0 f_j\| < 2\varepsilon$$

デアルカラ

$$\mathfrak{U}\cdot V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{U}_0 V_0;\ f_1, \cdots\cdots, f_k,\ \varepsilon)$$

証明II　$\mathfrak{U}^{-1}$ ハ $\mathfrak{U}$ ニツイテ連続デアル．何トナレバ

$$\mathfrak{U} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{U}_0;\ \mathfrak{U}_0^{-1} f_1, \cdots\cdots, \mathfrak{U}_0^{-1} f_k,\ \varepsilon)$$

トスレバ

$$\|(\mathfrak{U} - \mathfrak{U}_0)\mathfrak{U}_0^{-1} f_j\| < \varepsilon$$

故ニ $\mathfrak{U}^{-1}$ ガ unitär デアルカラ

$$\|(\mathfrak{U}^{-1} - \mathfrak{U}_0^{-1}) f_j\| < \varepsilon$$

故ニ

$$\mathfrak{U}^{-1} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{U}_0^{-1};\ f_1, \cdots\cdots, f_k,\ \varepsilon)$$

証明III．ρ_ψ ガ links-invariant デ $\mathfrak{W}_{\mathfrak{H}}$ ノ stark ナ Topologie ヲ与ヘルコトハ明白デアル．従ッテ $\mathfrak{W}_{\mathfrak{H}}$ ハ separabel デアルカラ，abzählbare Basis ヲ有スルコトガ分ル．[8]

証明IV．$\mathfrak{W}_{\mathfrak{H}}$ ハ vollständig デアル．何トナレバ $\mathfrak{U}_j\ (j = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ヲ Fundamentalfolge トスレバ，任意ノ $f \in \mathfrak{H}$ ニ対シテ

---

8) 一般ニ metrischer Raum ガ separabel ナラバ，ソレハ abzählbare Basis ヲ有スル。

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ k\to\infty}} \|(U_j^{-1} U_k - 1) f\| = 0,$$

従ツテ

$$\lim \|(U_k - U_j) f\| = 0\,;$$

スナハチ stark ナ Topologie デ

$$\lim (U_k - U_j) = 0$$

デアル。故ニ $\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ ガ vollständig デ、$\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}$ ハ $\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ 内デ abgeschlossen デアルカラ

$$\lim_{k\to\infty} U_k = U$$

ナル U ガ存在スル。（証明終）

§2. Haar ノ Maß

1. Haar ノ Maß. 吾々ハコノ§ニ於テ Haar ノ Maß ノ諸性質ニツイテ述ベル。先ヅ定義カラ始メヨウ：

Haar ノ Maß ノ定義. abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群 $\mathfrak{G}$ ノ Maß μ^* ガ次ノ條件 1)—4) ヲ満足スルトキ，μ^* ヲ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß トイフ：

1) μ^* ハ links-invariant デアル：$\mu^*(aA) = \mu^*(A)$, $a \in \mathfrak{G}$.

2) A ガ kompakt[9] ナレトキハ $\mu^*(A) < +\infty$

3) $\mathfrak{G}$ ノ Borel set ハ μ-meßbar デアル。

4) $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分集合 A ニ對シテ

$$B \supset A, \quad \mu^*(A) = \mu(B)$$ （附加註9）次頁へ）

ナル Borel set B ガ存在スル。

従ッテ Haar ノ Maß ニ於テハ Baire ノ函数ハスベテ meßbar デアッテ，任意ノ meßbar ナ函数ニ對シテ，コレト Maß 0 ヲ除イテ一致スル Baire ノ函数ガ存在スル。

定理3. μ^* ガ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ナルトキ，Produkt-maß $\mu\mu^*$[10] ハ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß デアル。

証明. $\mu\mu^*$ ガ Haar ノ Maß ノ満足スベキ條件 1)—4) ヲ満足スルコトヲ確メレバヨイ。コノ中 1)—3) ハ明白デアル. 4) ガ成立スルコトヲ示スタメニ，Γ ヲ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分集合トスル. 然ルトキハ

$$\mu\mu^*(\Gamma)=\underline{\mathrm{fin}}\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(A_j)\mu^*(B_j),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}A_j\times B_j\supset\Gamma.$$

コノ式ニ於テ μ^* ハ Haar ノ Maß デアルカラ，A_j, B_j ハ $\mathfrak{G}$ ノ Borel set ト考ヘテヨイ. 従ッテ $A_j^{(N)}$, $B_j^{(N)}$ ナル Borel set ヲ適當ニ選べバ

$$\mu\mu^*(\Gamma)=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j^{(N)})\mu(B_j^{(N)}),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}A_j^{(N)}\times B_j^{(N)}\supset\Gamma$$

---

9) 吾々ハ "kompakt" ヲ kompakt in $\mathfrak{G}$ ノ意味ニ用ヒル.

10) $\mu\mu^*$ ノ定義ニツイテハ §1. Nr 3 参照.

コヽニ於テ

$$\Delta = \prod_{N=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_j^{(N)} \times B_j^{(N)}$$

トオケバ，明ラカニΔハΓヲ含ムBorel setデアッテ，

$$\mu\mu(\Delta) \leqq \mu\mu\Big(\sum_{j=1}^{\infty} A_j^{(N)} \times B_j^{(N)} \Big)$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j^{(N)})\, \mu(B_j^{(N)})$$

故ニ $N \to \infty$ トスレバ，$\Delta \supset \Gamma$ デアルカラ

$$\mu\mu(\Delta) = \mu\mu^{*}(\Gamma). \qquad \text{（証明終）}$$

2. *Eindeutigkeit.* コンデHaarノMaßノ一意性ヲ証明スル。

定理4.（Eindeutigkeitssatz）Abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群 $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ハ multiplikativ ナ Konstant ヲ考ヘニ入レナケレバ，eindeutig ニ定マル。

証明．(B) ヲ $\mathfrak{G}$ ノ kompakt ナ Borel set 全体ヨリ成ル Borel 族トスル。μ_1^{*}，μ_2^{*} ヲ $\mathfrak{G}$ ノ二ツノ Haar ノ Maß トスレバ

$$\mu^{*}(A) = \mu_1^{*}(A) + \mu_2^{*}(A), \qquad A \subset \mathfrak{G}$$

ニヨツテ定義サレタ μ^{*} モ亦 Haar ノ Maß デアッテ，(B) デ考ヘレバ，μ_1 ハ μ-absolut-stetig ナ total additive Mengenfunktion デアル。従ッテ，Nikodym ノ定理ニヨッテ

$$\mu_1(B)=\int_B \varphi(x)\,\mu(dx) \qquad B\in(B)$$

ナル Baire ノ函數 $\varphi(x)$ ガ存在スル。然ルニ μ_1, μ 共ニ links-invariant デアルカラ，任意ノ $a\in\mathfrak{G}$ ニ對シテ

$$\mu_1(B)=\int_B \varphi(a^{-1}x)\,\mu(dx)$$

故ニ，$\varphi(a^{-1}x)$ ト $\varphi(x)$ ハ μ-Maß 0 ヲ除イテ一致スル：スナハチ

$$\int_{\mathfrak{G}} |\varphi(a^{-1}x)-\varphi(x)|\,\mu(dx)=0$$

故ニ

$$\int_{\mathfrak{G}}\mu(da)\int_{\mathfrak{G}} |\varphi(a^{-1}x)-\varphi(x)|\,\mu(dx)=0$$

然ルニ，$\varphi(a^{-1}x)$ ハ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ Baire ノ函數デアルカラ，$\mu\mu$-meßbar デアル。故ニ Fubini ノ定理ニヨッテ

$$\int_{\mathfrak{G}}\mu(dx)\int_{\mathfrak{G}} |\varphi(a^{-1}x)-\varphi(x)|\,\mu(da)=0$$

故ニ μ-Maß 0 ノ x-Menge X_0 ヲ除ケバ，x ニヨッテ定マル μ-Maß 0 ノ a-Menge $A_0(x)$ ガアッテ

$$a\notin A_0(x) \text{ ノトキ } \varphi(a^{-1}x)=\varphi(x)$$

トナル。今 x, y ヲ $\notin X_0$ ナル任意ノ二元トスレバ

$$\mu(x^{-1}A_0(x))=0,\quad \mu(y^{-1}\ {}_0(y))=0$$

デアルカラ $-x^{-1}A_0(x)$ ト $-y^{-1}A_0(y)$ ハ共通元ヲ有

スル[11]。コノ共通元ノ一ツヲcトスレバ

$$c = x^{-1}a = y^{-1}b, \quad a \in A_0(x), \quad b \in A_0(y).$$

故ニ

$$a^{-1}x = b^{-1}y.$$

從ツテ

$$\varphi(x) = \varphi(y).$$

スナハチ μ-Map 0 ノ X_0 ヲ除ケバ $\varphi(x)$ ハ konstant デアル。コノ Konstant ヲ γ_1 トオケバ、

$$\mu_1(B) = \gamma_1 \mu(B) \qquad B \in (B).$$

然ルニ Haar ノ Map ハ (B) ノ集合 B ニ對スル値ヲ與ヘレバ eindeutig ニ定マル。[12] 故ニ

$$\mu_1^*(A) = \gamma_1 \mu^*(A), \qquad A \subset \mathfrak{G}$$

全ク同様ニ

$$\mu_2^*(A) = \gamma_2 \mu^*(A).$$

故ニ

$$\mu_1^*(A) : \mu_2^*(A) = \gamma_1 : \gamma_2 \qquad \text{(證明終)}$$

コノ Eindeutigkeitssatz ニヨツテ次ノ定理5ガ簡單ニ證明サレル。

定理5.[13] μ^* ガ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Map ナルトキ、任意

---

11) 勿論 $\mu(\mathfrak{G}) = 0$ ナル場合ハ除外スル。

12) 一般ニ separabel ナ metrischer Raum ハ abzählbare Basis ヲ有スル。

13) コノ定理ハ Eindeutigkeitssatz ニヨラズ直接ニモ證明サレル。§4 補助定理参照。

ノ $A \subset \mathfrak{G}$ ニ對シテ $\mu^*(A)$ ハ A ヲ含ム開集合 Θ ノ Maß ノ下限デアル:

$$\mu^*(A) = \underset{\Theta \supset A}{\underline{\operatorname{fin}}}\ \mu(\Theta).$$

證明. $A \subset \mathfrak{G}$ ニ對シテ

$$\bar{\mu}^*(A) = \underset{\Theta \supset A}{\underline{\operatorname{fin}}}\ \mu(\Theta)$$

トオケバ $\bar{\mu}^*$ モ亦 Haar ノ Maß デアッテ, 開集合 Θ ニ對シテハ $\bar{\mu}(\Theta)$ ト $\mu(\Theta)$ ハ一致スル. 故ニ Eindeutigkeitssatz ニヨッテ

$$\bar{\mu}^*(A) = \mu^*(A). \qquad \text{(證明終)}$$

3. Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}^{(\mu)}$. $\mathfrak{G}$ ヲ abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群, μ^* ヲソノ Haar ノ Maß トシ, $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}^{(\mu)}$ ヲ μ-quadrat summierbar ナ函数全体ノ作ル Hilbert 空間, $\mathfrak{U}_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{U}_{\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}}$ ヲ $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ ノ unitär ナ Operator 全体ノ作ル群トスル. 定理5ヨリ直チニ分ル如ク,[14] $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ ハ separabel デアルカラ, 定理2ニヨレバ, $\mathfrak{U}_{\mathfrak{G}}$ ハ stark ナ Topologie ニ關シテ abzählbare Basis ヲ有スル vollständig ナ topologische Gruppe デア

---

14) 何トナレバ: $\mathfrak{G}$ ノ abzählbare Basis ヲ $(\Theta_j;\ j=1, 2, \text{-----})$ トシ, Θ_j ノ有限個ノ和ノ全体ヨリ成ル集合族ヲ (Θ) トスレバ, 明ラカニ (Θ) ハ (μ) デ überall dicht ナ可附番集合デアル. 故ニ定理1ニヨッテ $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ ハ separabel デアル。

ル。コノトキ

定理6. $\mathfrak{G}$ ノ元 a ニ對シテ, U_a ヲ

$$U_a f(x) = f(a^{-1}x), \qquad f(x) \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$$

ニヨツテ定義サレタ unitärer Operator トスル。然ルトキハ

$$a \longrightarrow U_a$$

ナル Abbildung ニヨツテ, $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{G}}$ 内ニ topologisch isomorph ニ einbetten サレル。

証明. I) $a \to U_a$ ハ明ラカニ Isomorphismus デアル。[15)]

II) $a \to U_a$ ハ連續デアル。スナハチ $\lim_{N\to\infty} a_N = a_0$ ナルトキハ, stark ナ Topologie デ $\lim_{N\to\infty} U_{a_N} = U_{a_0}$ デアル。何トナレバ, i) Θ ヲ $\mu(\Theta) < +\infty$ ナル開集合トスレバ

---

15) 何トナレバ,明ラカニ

$$U_a U_b = U_{ab}$$

デアルカラ, $a \neq b$ ナルトキ $U_a \neq U_b$ ナルコトヲ示セバヨイ. コノタメニ, Θ ヲ 1 ノ充分小サイ近傍トスレバ

$$a\Theta \frown b\Theta = 0$$

デアル。 從ツテ Θ ノ charakteristische Funktion ヲ e_Θ トスレバ,

$$\| U_a e_\Theta - U_b e_\Theta \| = \| e_{a\Theta + b\Theta} \| = 2\mu(\Theta) > 0$$

故ニ $U_a \neq U_b$ ——.

$$F_j \subset F_{j+1}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} F_j = \Theta$$

ナル kompakt ナ閉集合 F_j ($j=1,2,3,\cdots\cdots$) ガ存在スル。$\lim a_N = a_0$ デアルカラ，j ニ對シテ $N(j)$ ヲ充分大キクトレバ，

$$N \geqq N(j) \text{ ノトキ} \qquad a_N F_j \subset a_0 \Theta, \quad a_0 F_j \subset a_N \Theta$$

トナル；從ッテ

$$d_\mu(a_N \Theta,\ a_0 \Theta) \leqq 2\mu(\Theta - F_j).$$

故ニ

$$\lim_{j\to\infty} \mu(\Theta - F_j) = 0$$

デアルカラ

$$\lim_{N\to\infty} d_\mu(a_N \Theta,\ a_0 \Theta) = 0$$

從ッテ，Θ ノ charakteristische Funktion ヲ e_Θ トスレバ

$$\lim_{N\to\infty} \| (\mathcal{U}_{a_N} - \mathcal{U}_{a_0}) e_\Theta \| = 0.$$

ii) A ヲ μ-Maß ガ有限ナ任意ノ μ-meßbar ナ集合トスルトキ，定理5ニヨレバ，任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$\Theta \supset A, \qquad \mu(\Theta - A) < \varepsilon$$

ナル開集合 Θ ガ存在スル．從ッテ

$$\| e_A - e_\Theta \| < \varepsilon.$$

故ニ

$$\lim_{N\to\infty} \| (\mathcal{U}_{a_N} - \mathcal{U}_{a_0}) e_A \| = 0$$

デナケレバナラナイ。

iii) 然ルニ任意ノ $f \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{F}}$ ハ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_{A_j}$ ナル形ノ函数ノ limit トシテ現ハサレル。故ニ

$$\lim_{N\to\infty} \| (\mathfrak{U}_{a_N} - \mathfrak{U}_{a_0}) f \| = 0.$$

スナハチ

$$\lim_{N\to\infty} \mathfrak{U}_{a_N} = \mathfrak{U}_{a_0}$$

デアル。

III) $\lim_{N\to\infty} \mathfrak{U}_{a_N} = \mathfrak{U}_{a_0}$ ナラバ $\lim_{N\to\infty} a_N = a_0$ デアル。何トナレバ Θ ヲ 1 ノ任意ノ近傍トシタトキ，

$$\lim_{N\to\infty} \| \mathfrak{U}_{a_N} e_\Theta - \mathfrak{U}_{a_0} e_\Theta \| = 0$$

スナハチ

$$\lim_{N\to\infty} d_\mu (a_N \Theta, a_0 \Theta) = 0$$

デアルカラ，N ガ充分大ナラバ

$$a_N \Theta \frown a_0 \Theta \neq 0,$$

從ッテ，

$$a_N \in a_0 \Theta \Theta^{-1}$$

デアル。故ニ

$$\lim_{N\to\infty} a_N = a_0$$

—— I), II), III) ニヨッテ $a \to \mathfrak{U}_a$ ガ topologisch isomorph ナ Einbettung ナルコトガワカル。[16)]

---

16) $a \to \mathfrak{U}_a$ ノ連続性カラ次ノ定理ガ得ラレル：定理 $\mu(A) > 0$ ナラバ $A \cdot A^{-1}$ ハ単位元ノ近傍ヲ含ム。（次頁ヘツヅク）

§ 3. Weil ノ Maß

1. Weil ノ Maß. 定義. 吾々ハ，群 G ノ Maß m^* ガ次ノ二ツノ條件 1), 2) ヲ満足スルトキ，m^* ヲ G ノ Weil ノ Maß トイフコトニスル：

1) m^* ハ links-invariant デアル：

$$m^*(aA) = m^*(A), \qquad a \in G.$$

2) $f(x)$ ガ G ノ m-meßbar ナ函數ナルトキ，二変數 x, y ノ函數 $f(y^{-1}x)$ モ m-meßbar デアル。[17)]

Weil ノ Maß ハ種々ノ著シイ性質ヲ有スル。例ヘバ

定理 7. m^* ヲ G ノ Weil ノ Maß トスル。コノトキ，G ノ部分集合 A ガ m-meßbar ナラバ A^{-1} モ m-meßbar デアッテ，$m(A) = 0$ ナルトキハ $m(A^{-1}) = 0$ デアル。

證明. A ノ charakteristische Funktion ヲ $e_A(x)$ トスレバ，$e_A(y^{-1}x)$ ガ m-meßbar デアル。然ルニ

(脚註16・ツヅキ) 證明： $a \to U_a$ ガ stetig デアルカラ $\lim a = 1$ ノトキ

$$\lim \| U_a e_A - e_A \| = 0$$

從ツテ

$$aA \cap A \neq 0$$

故ニ a ガ十分 1 ニ近イトキ $a \in A \cdot A^{-1}$ デアル。——

17) $f(y^{-1}x)$ ガ m-meßbar トイフノハ mm-meßbar ノ意味デアル。§1. Nr. 3 參照。

$$e_A(y^{-1}x) = e_{xA^{-1}}(y)$$

デアルカラ, Fubini ノ定理ニヨッテ, xA^{-1} ハ Maß 0 ノ x ヲ除ケバ m-meßbar デアル. 従ッテ, m ガ links-invariant デアルカラ, A^{-1} ハ m-meßbar デナケレバナラナイ. 特ニ $m(A)=0$ ナルトキハ

$$\int_G m(dx)\int_G e_A(y^{-1}x)\, m(dy)=\int_G m(dy)\int_G e_A(y^{-1}x)\, m(dx)=0$$

デアルカラ

$$m(A^{-1})=\int_G e_A(y^{-1}x)\, m(dy)=0$$

—— Haar ノ Maß ハ Weil ノ Maß デアルガ, 其ノ他ニモ Haar ノ Maß ヨリ "induzieren" サレル Weil ノ Maß ガ存在スル. 以下之ヲ述ベル.

2. Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß. $\mathfrak{G}$ ヲ abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群, μ^* ヲソノ Haar ノ Maß トシ, G ヲソノ Normalteiler N ニヨル Restklassengruppe G/N ガ $\mathfrak{G}$ ニ含マレル群トスル: $G/N \subset \mathfrak{G}$.
G ノ元ヲ, 一般ニ a, b, x, y, etc., 部分集合ヲ A, B, etc. デ現シ, $\mathfrak{G}$ ノ元ヲ ξ, η, etc., 部分集合ヲ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, etc. 現ハスモノトシ. $a \in G$ ノ mod. N Restkllasse ヲ

$$r(a) = r_N(a) = r_{\mathrm{mod}\, N}(a) \quad \text{etc.}$$

書ク.[18] $a \to r(a)$ ハスナハチ homomorph ナ

脚註 18) ハ次頁ニ)

Abbildung デアル．r ノ "*Umkehrung*" ヲ r^{-1} デ現ハス．コノトキ

定理 8．$A \subset G$ ニ對シテ

$$m^*(A) = \mu^*(r(A))$$

トオケバ，$m^* = m^*(A)$ ハ G ノ *links-invariant* ナ *Maß*[19] デアッテ，$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ ガ μ-*meßbar* ナルトキハ，$r^{-1}(\mathfrak{A})$ ハ m-*meßbar* デアル。

證明．i) m^* ガ *links-invariant* ナ *Carathéodory* ノ *äußeres Maß* ナルコトハ明白デアル。
ii) $\mathfrak{A}$ ヲ μ-*meßbar* トスレバ，任意ノ $A \subset G$ ニ對シテ

$$\begin{aligned} m^*(A) = \mu^*(r(A)) &= \mu^*(r(A) \frown \mathfrak{A}) + \mu^*(r(A) - \mathfrak{A}) \\ &= m^*(A \frown r^{-1}(\mathfrak{A})) + m^*(A - r^{-1}(\mathfrak{A})) \end{aligned}$$

デアルカラ，$r^{-1}(\mathfrak{A})$ モ m-*meßbar* デアル．iii) 從ッテ G モ m-*Maß* ガ有限ナ集合ノ可附番個ノ和トシテ現ハサレル．iv) 任意ノ A ニ對シテ

$$\mathfrak{A} \supset r(A), \quad \mu(\mathfrak{A}) = \mu^*(r(A))$$

ナル μ-*meßbar* ナ集合 $\mathfrak{A}$ ガ存在スル．コノトキ明ラカニ

$$r^{-1}(\mathfrak{A}) \supset A$$

デアッテ，

$$m^*(A) \leqq m(r^{-1}(\mathfrak{A})) = \mu^*(\mathfrak{A} \frown G/N) \leqq \mu(\mathfrak{A}) = \mu^*(r(A)) = m^*(A)$$

18) コノ記号ニヨレバ，$r(G) = G/N$．

$$r\,r^{-1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \frown r(G) = \mathfrak{A} \frown (G/N).$$

19) §1, Nr. 1 *Maß* ノ定義參照．

故ニ

$$m^*(A)=m(r^{-1}(\alpha)).$$

故ニ m^* ハ regular デアル。　（証明終）

定義。　$\mathfrak{G}-G/N$ ノ μ-inneres Maß ガ 0：

$$\mu_*(\mathfrak{G}-G/N)=0$$

ナルトキ

$$m^*(A)=\mu^*(r(A)),\qquad A\subset G$$

ニヨツテ定義サレタ G ノ Maß m^* ヲ Haar ノ Maß μ^* ニヨツテ induzieren サレタ Maß ト名付ケ，m^*_μ デ現ハス；スナハチ

$$m^*_\mu(A)=\mu^*(r(A)),\qquad A\subset G.$$

コノトキ，$G=G/N=\mathfrak{G}$ ナラバ，明ラカニ m^*_μ ト μ^* ハ一致スル。[20]

---

20) 一般ニ m^* ガ空間 R ノ Maß ナルトキ，R ノ部分集合 X ニ對シテ，X ニ含マレル m-meßbar ナ部分集合 A ノ Maß ノ上限ヲ X ノ m-inneres Maß ト名付ケ $m_*(X)$ デ現ハス。記号デ書ケバ

$$m_*(X)=\overline{\operatorname{fin}}_{A\subset X}\, m(A),\qquad A\text{ ハ } m\text{-meßbar}$$

コノトキ，ヨク知ラレテヰル如ク，A ガ m-meßbar ナラバ

$$m(A)=m^*(A\frown X)+m_*(A-X)$$

ガ成立スル ———— 。

$\mu_*(\mathfrak{G}-G/N)=0$ ノトキ，G/N ガ μ-meßbar ナラバ $G/N=\mathfrak{G}$ デナケレバナラナイ；從ツテ $G/N\neq\mathfrak{G}$ ナラバ G/N ハ μ-meßbar デナイ。吾々ハ後デカクノ如キ G/N ノ例ヲ超限帰納法ヲ用ヒテ構成スル。

定理9. $G/N\subset \mathfrak{g}$ ナルトキ, G ノ Maß m^* ガ $\mathfrak{g}$ ノ Haar ノ Maß μ ニヨッテ induzieren サレタ Maß ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ, 次ノ 1) 及ビ 2) ガ成立スルコトデアル:

1) $\mathfrak{L}$ ガ $\mathfrak{g}$ ノ Borel set ナラバ $r^{-1}(\mathfrak{L})$ ハ m-meßbar デアッテ

$$m(r^{-1}(\mathfrak{L}))=\mu(\mathfrak{L}).$$

2) 任意ノ $A\subset G$ ニ對シテ

$$r^{-1}(\mathfrak{L})\supset A,\quad m^*(A)=m\left(r^{-1}(\mathfrak{L})\right)$$

ナル Borel set $\mathfrak{L}\subset \mathfrak{g}$ ガ存在スル。

證明. a) 必要ナルコトヲ示スタメニ, $m^*=m^*_\mu$ トスル。 1) $\mathfrak{L}$ ヲ Borel set トスレバ

$$\mu_*(\mathfrak{L}-G/N)\leqq \mu_*(\mathfrak{g}-G/N)=0$$

デアルカラ

$$\mu(\mathfrak{L})=\mu^*(\mathfrak{L}\frown G/N).$$

故ニ

$$m(r^{-1}(\mathfrak{L}))=\mu^*(\mathfrak{L}\frown G/N)=\mu(\mathfrak{L}).$$

2) 任意ノ A ニ對シテ

$$\mathfrak{L}\supset r(A),\quad \mu^*(r(A))=\mu(\mathfrak{L})$$

ナル Borel set $\mathfrak{L}$ ガ存在スル. コノトキ, 明ラカニ

$$r^{-1}(\mathfrak{L})\supset A$$

デアッテ, 1) ノ結果ヲ利用スレバ,

$$m^*(A)=\mu^*(r(A))=\mu(\mathfrak{L})=m(r^{-1}(\mathfrak{L})).$$

b) 充分ナルコトノ證明. I) m^* ガ 1) 及ビ 2) ヲ滿

足スルモノトスル。コノトキ，$\mathfrak{L} \subset \mathfrak{G} - G/N$ ナル Borel set $\mathfrak{L}$ ニ對シテハ $r^{-1}(\mathfrak{L}) = 0$ デアルカラ，1) ニヨッテ

$$\mu(\mathfrak{L}) = m(r^{-1}(\mathfrak{L})) = 0$$

トナル。從ッテ

$$\mu_*(\mathfrak{G} - G/N) = 0.$$

II) 任意ノ $A \subset G$ ニ對シテ 2) ヲ滿足スル $\mathfrak{L}$ ヲトレバ

$$m^*(A) = m(r^{-1}(\mathfrak{L})) = \mu(\mathfrak{L}) = m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{L})) \geqq m_\mu^*(A).$$

m_μ モ亦 1) 2) ヲ滿足スルカラ，同樣ニシテ，

$$m_\mu^*(A) \geqq m^*(A)$$

ナルコトガ分ル。故ニ

$$m^* = m_\mu^*. \qquad \text{（証明終）}$$

3. Cartetisches Produkt.

$G/N \subset \mathfrak{G}$ ナルトキハ

$$G \times G/N \times N = G/N \times G/N \subset \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$$

ト考ヘラレル。[21] コノトキ

定理10. m^* ガ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß μ^* ニヨッテ

---

21) $K \times R$ ハ $x, y \in R$ ナル Paar(x, y) ノ全体ヨリ成ル空間デアル。§1. Nr. 3 參照。$G \times G/N \times N \subset \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ ナル Einbettung ハ

$$r_{N \times N}(x, y) = (r_N(x),\ r_N(y))$$

デ與ヘラレル。吾々ハ簡單ノタメ，r_N，$r_{N \times N}$ ヲ共ニ同ジ文字 r デ表ハス。

induzieren サレタ G ノ Maß ナルトキハ, cartetisches Produkt G×G ノ Maß mm^* ハ, $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß $\mu\mu^*$ ニヨッテ induzieren サレタ Maß デアル. 記号デ書ケバ

$$m_\mu m^*_\mu = m^*_{\mu\mu}.$$

証明. mm^* ガ定理9ノ條件 1) 及ビ 2) ヲ満足スルコトヲ示セバヨイ。

1) Ⓗ ヲ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ開集合トスレバ, Ⓗ ハ $\mathfrak{G}$ ノ Borel set $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ ニヨッテ互ニ共通点ヲ有シナイ "矩形" $\mathfrak{A}_j\times\mathfrak{B}_j$ ノ高々可附番個ノ和トシテ表ハサレル:

$$Ⓗ=\sum_{j=1}^{\infty}\mathfrak{A}_j\times\mathfrak{B}_j$$

從ッテ

$$r^{-1}(Ⓗ)=\sum_{j=1}^{\infty}r^{-1}(\mathfrak{A}_j)\times r^{-1}(\mathfrak{B}_j).$$

然ルニ, $r^{-1}(\mathfrak{A}_j)$, $r^{-1}(\mathfrak{B}_j)$ ハ m-meßbar デアッテ

$$m(r^{-1}(\mathfrak{A}_j))=\mu(\mathfrak{A}_j),\qquad m(r^{-1}(\mathfrak{B}_j))=\mu(\mathfrak{B}_j)$$

デアルカラ, $r^{-1}(Ⓗ)$ ハ mm-meßbar デ

$$mm(r^{-1}(Ⓗ))=\mu\mu(Ⓗ)$$

デアル。

從ッテ, 一般ニ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ Borel set ハ mm-meßbar デアル。Δ ヲ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ Borel set トシ, 一般ニ Ⓗ デ開集合ヲ表ハスコトニスレバ,

$$\mu\mu(\Delta) = \underline{\mathrm{fin}}_{\text{Ⓗ}\supset\Delta}\ \mu\mu(\text{Ⓗ})$$

$$= \underline{\mathrm{fin}}_{\text{Ⓗ}\supset\Delta}\ mm(r^{-1}(\text{Ⓗ})) \geqq mm(r^{-1}(\Delta)).$$

然ルニ，$\text{Ⓗ}\supset\Delta$トスレバ，$mm(r^{-1}(\text{Ⓗ})) = \mu\mu(\text{Ⓗ})$デアルカラ

$$mm(r^{-1}(\Delta)) + mm(r^{-1}(\text{Ⓗ}-\Delta)) = \mu\mu(\Delta) + \mu\mu(\text{Ⓗ}-\Delta)$$

故ニ，上ノ不等式ハ等式デナケレバナラナイ：

$$mm(r^{-1}(\Delta)) = \mu\mu(\Delta).$$

2) Γヲ$G\times G$ノ任意ノ部分集合トスル．然ルトキハ

$$mm^*(\Gamma) = \underline{\mathrm{fin}} \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)m^*(B_j),\quad \sum_j A_j\times B_j \supset \Gamma.$$

然ルニ，$m^* = m^*_\mu$デアルカラ，

$$r^{-1}(\mathfrak{a}_j)\supset A_j,\quad m^*(A_j) = \mu(\mathfrak{a}_j);$$

$$r^{-1}(\mathfrak{b}_j)\supset B_j,\quad m^*(B_j) = \mu(\mathfrak{b}_j).$$

ナル$\mathfrak{G}$ノBorel set $\mathfrak{a}_j$，$\mathfrak{b}_j$ガ存在スル．従ッテ，Borel set $\mathfrak{a}_j^{(N)}$，$\mathfrak{b}_j^{(N)}$ヲ適当ニ選ンデ

$$mm^*(\Gamma) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{a}_j^{(N)})\mu(\mathfrak{b}_j^{(N)}).$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{a}_j^{(N)}\times\mathfrak{b}_j^{(N)} \supset \Gamma$$

ナラシメルコトガ出来ル．コヽデ

$$\Delta = \prod_{N=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{a}_j^{(N)}\times\mathfrak{b}_j^{(N)}$$

トオケバ，明ラカニΔハ$\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ノBorel setデアッテ，

$$r^{-1}(\Delta) \supset \Gamma$$

且ツ

$$mm(r^{-1}(\Delta)) = \mu\mu(\Delta) \leqq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{a}_j^{(N)})\mu(\mathfrak{b}_j^{(N)});$$

從テ，$N \to \infty$ トスレバ

$$mm(r^{-1}(\Delta)) = mm^*(\Gamma).$$

故ニ，定理9ニヨッテ

$$mm^* = m^*_{\mu\mu} \qquad \text{(証明終)}$$

4. 定理11. Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß ハ Weil ノ Maß デアル。スナハチ，$G/N \subset \mathfrak{G}$，m^* ヲ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ G ノ Maß トスレバ，m^* ハ links-invariant デアッテ，$x \in G$ ノ函數 $f(x)$ ガ m-meßbar ナルトキ，二変數 x, y ノ函數 $f(y^{-1}x)$ モ m-meßbar デアル。

証明：m^* ガ links-invariant ナルコトハ既ニ定理8デ証明シタ．次ニ，$\mathfrak{b}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ Borel set トスレバソノ charakteristische Funktion $e_{\mathfrak{b}}(\xi)$ ハ $\xi(\in \mathfrak{G})$ ノ Baire ノ函數デアルカラ，$e_{\mathfrak{b}}(\eta^{-1}\xi)$ ハ $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ ノ Baire ノ函數デアル。然ルニ定理10ニ依レバ

$$mm^* = m^*_{\mu\mu}$$

デアルカラ，定理9ニヨッテ[22)]

$$e_{\mathfrak{b}}(r(y^{-1}x))$$

ハ $G \times G$ ノ mm-meßbar ナ函數デアル。從ッテ

(脚註 22) ハ次頁へ

$$e_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{r}(x)) = e_{\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b})}(x)$$

デアルカラ

$$e_{\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b})}(y^{-1}x)$$

ハ，二変数 $x, y \in G$ ノ m-meßbar ナ函数デアル。

今，A_0ヲ G ノ m-Maß 0 ナル部分集合トスレバ，$m^* = m^*_\mu$ デアルカラ，

$$\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_0) \supset A_0, \quad m(\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_0)) = 0$$

ナル $\mathfrak{O}_f$ ノ Borel set $\mathfrak{b}_0$ ガ存在スル。charakteristische Funktion ニツイテ考ヘレバ

$$e_{\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(x) \geqq e_{A_0}(x),$$

従ツテ

$$e_{\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(y^{-1}x) \geqq e_{A_0}(y^{-1}x).$$

然ルニ $e_{\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(y^{-1}x)$ ハ m-meßbar デアツテ，

$$\int_G e_{\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(y^{-1}x)\, m(dx) = m(\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_0)) = 0$$

デアルカラ，Fubini ノ定理ニヨツテ

$$\iint_{G\times G} e_{\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(y^{-1}x)\, m(dx)\, m(dy)$$
$$= \int_G m(dy) \int_G e_{\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(y^{-1}x)\, m(dx) = 0;$$

---

22) 一般ニ $m = m_\mu$ ナルトキ，$f(\xi)$ ガ Baire ノ函数ナラバ $F(x) = f(\mathfrak{r}(x))$ ハ x ノ m-meßbar ナ函数デアル．何トナレバ，O ヲ任意ノ開集合トスレバ，$f^{-1}(O)$ ハ Borel 集合デアルカラ、定理9ニヨツテ $F^{-1}(O) = \mathfrak{r}^{-1} f^{-1}(O)$ ハ m-meßbar デアル。

故ニ，$e_{r^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(y^{-1}x)$，従ッテ $e_{A_0}(y^{-1}x)$ ハ，$G\times G$ ニ於テ mm-Maß 0 ノ点ヲ除ケバ 0 デアル。故ニ

$$e_{A_0}(y^{-1}x)$$

ハ x, y ノ m-meßbar ナ函数デアル。

然ルニ，A ヲ G ノ任意ノ m-meßbar ナ部分集合トスレバ，

$$r^{-1}(\mathfrak{b})\supset A,\quad m(r^{-1}(\mathfrak{b})-A)=0$$

ナル Of ノ Borel set $\mathfrak{b}$ が存在スル。コノトキ $e_{r^{-1}(\mathfrak{b})}(y^{-1}x)$ ハ m-meßbar，又 $m(r^{-1}(\mathfrak{b})-A)=0$ デアルカラ，$e_{r^{-1}(\mathfrak{b})-A}(y^{-1}x)$ モ亦 m-meßbar デアル。従ッテ

$$e_A(y^{-1}x)=e_{r^{-1}(\mathfrak{b})}(y^{-1}x)-e_{r^{-1}(\mathfrak{b})-A}(y^{-1}x)$$

モ亦 m-meßbar デナケレバナラナイ。

一般ニ G ノ m-meßbar ナ函数 $f(x)$ ハ，有限個ノ m-meßbar ナ charakteristische Funktion ノ一次結合ノ limit トシテ表ハサレル：

$$f(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{J_N}\alpha_j^{(N)}e_{A_j^{(N)}}(x),\quad (\alpha_j^{(N)} \text{ ハ複素数})$$

従ッテ

$$f(y^{-1}x)=\lim_{N\to\infty}\sum_j\alpha_j^{(N)}e_{A_j^{(N)}}(y^{-1}x).$$

故ニ，各 $e_{A_j^{(N)}}(y^{-1}x)$ が m-meßbar デアルカラ

$$f(y^{-1}x)$$

モ m-meßbar デアル。　　　　（証明終）

コノ定理11ノ証明ニ於テ，$y^{-1}x$ ヲ yx デ置換ヘレバ，次ノ定理12ガ得ラレル：

定理12. $m^* = m^*_\mu$ ガ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß トルトキ，x ノ函數 $f(x)$ ガ m-meßbar ナラバ，二変數 x, y ノ函數 $f(yx)$ モ m-meßbar デアル。

——（続ク）——