# 776. F. Riesz ノ Mean ergodic theorem

吉田　耕作（阪大）

近着ノ J. London Math. Soc. 13 (1938), p. 274—278 = F. Riesz ノ Some mean ergodic theorem ト題スル論文ガ出テヲリマス。其ノ定理 1, 2 ハ $\underline{L^p(0,1)}$

(但シ $p>1$) デノ mean ergodic theorem デアリ、筆者 談話 720, 角谷氏談話 731 ニ得ラレタ Banach 空間ニ於ケル mean ergodic theorem ノ方ガ一般デアリマス。Riesz ノ定理3ハ $L(0,1)$ ニ於ケル mean ergodic theorem デ次ノ形ニ述ベラレテアリマス。

$\boxed{\text{定理}}$ $T$ ヲ Banach 空間 $L(0,1)$ デノ線型作用素デ

(1) $\|T^n\| \leqq$ 常数 $(n=1,2,\ldots\ldots)$

ヲ満足スルモノトスル。コノトキ任意ノ $f \in L(0,1)$ ニ対シ

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m \cdot f \qquad (n=1,2,\ldots\ldots)$$

ガ equi-integrable[1] ナラバ $f^* \in L(0,1)$ ガ存在シテ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n - f^*|\,dx = 0.$$

$\boxed{\text{証明}}$ mean ergodic theorem (談話720) ニヨレバ $\{f_n\}$ カラ weakly convergent ナ部分列 $\{f_{n'}\}$ ガ探ベレバヨイ。[2] (1) ニヨリ $\int_0^1 |f_n|\,dx <$ 常数 $(n=1,2,\ldots\ldots)$

---

(1) 任意ノ $\delta>0$ ニ対シテ $\varepsilon>0$ ガ存在シ $\mathrm{mes}(E)<\varepsilon$ ナラバ $\int_E |f_n|\,dx<\delta$ $(n=1,2,\ldots\ldots)$。コノ條件ハ例ヘバ $(0,1)$ ヲ $(0,1)$ ニ測度ヲ変ヘナイヤウニ変換スル変換 $\varphi$ ニ対シ $Tf=g$, $g(x)=f(\varphi\cdot x)$ デ定義サレル $T$ ニ対シテハ満足サレル。

(2) $L(0,1)$ ハ weakly complete (H. Steinhaus ノ定理)

ダカラ H. Lebesgue ノ定理[3] ニヨリ $\{f_n\}$ ガ weakly convergent ナ部分列ヲ含ムタメノ必充條件ハ $\{f_n\}$ ガ equi-integrable ナコトデアルカラ証明了デアル。

Banach ノ本ニハ Lebesgue ノ定理ノ証明ガ書イテナイカラ，念ノタメニ Riesz ニ従ッテ証明ノ方針ヲ書イテヲカウ。

$\boxed{\text{方針}}$ $F_n(x)=\int_0^x f_n dx$ ト置クト，equi-integrable ナコトカラ $\{F_n(x)\}$ ハ equi-continuous.
故ニ $(0,1)$ ノ各点デ收斂スルヤウナ部分列 $\{F_{n'}(x)\}$ ガ撰ベル：

$$\lim_{n'\to\infty} F_{n'}(x)=F^*(x).$$

equi-integrability カラ $F^*(x)$ ハ absolutely continuous: $F^*(x)=\int_0^x f^* dx$, $f^*\in L(0,1)$. 即チ $\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n dx$ $=\int_0^x f^* dx$ $(0\leqq x\leqq 1)$
故ニ equi-integrability カラ $(0,1)$ デ有界可測ナ函數 $m(x)$ ニ對シ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n m\, dx=\int_0^1 f^* m\, dx$$

ガ云ヘル。 —— 以上 ——

(注意1) equi-integrable ナル概念ハ南雲氏ガ

(3) S. Banach: Théorie des opérations linéaires, P. 8.

Lebesgue トハ独立ニ考ヘテ交分法，微分方程式等ニ応用サレタコトガアル。[1]

（注意2） Markov 過程ニ出テクル核

$$p(x,y) \geqq 0, \quad \int_0^1 p(x,y)\,dy \equiv 1$$

ヲ考ヘテミル。L(0,1) デノ線型作用素 P：

$$P \cdot f = g, \quad g(y) = \int_0^1 f(x)\,p(x,y)\,dx$$

ガ weakly completely continuous[2] ナタメノ必充條件ハ上ノ Lebesgue ノ定理ニヨリ

(2) 任意ノ $\delta > 0$ ニ對シ $\varepsilon > 0$ ガ存在シ $mes(E) < \varepsilon$ ナラ $x$ ニ關シテ一様ニ $\int_E p(x,y)\,dy < \delta$.

ナルコトガワカル。之ハ所謂 J. L. Doob ノ條件[3] デアル。所ガ (2) ガ満足サレテヲレバ

(3) 正整數 $m$ ト完全連續ナ線型積分作用素 Q ガ存在シテ $\|P^m - Q\| < 1$

ガ成立ツ。[4] 即チ外見上弱サウナ條件 weak comp. continuity ヲ假定スルト殆ンド完全連續ト同ジコトニナッテ了フコトハ面白イト思ヒマス。斯ル Markov 過程ノ性質ハ相當詳細ニワカッテヲル（Doeblin ノ研究[5]）。又上ニ述ベタ

(1) 日本数学輯報 (1929).

(2) L(0,1) ノ単位球ヲ weakly compact ナ set ニ寫スコト。

(3) 学会誌話 724.

(4) 〃 〃 746.

(5) Ann. of Math. 1937. （次頁ノ分）

様ニ$P.f=g$, $g(x)=f(\tilde{T}x)$（$\tilde{T}$ハ測度ヲ変ヘナイ変換）ノ場合ハ *Ergodentheorie* ノ一般論（*Kryloff-Bogoliouboff*[5]）デ良ク調ベラレテヲル。此ノ最後ノ場合ニハ $P$ハ勿論完全連続性ト甚ダシク距ッテヲリマス。即チ今迄知ラレテヲル$L(0,1)$デノ *Markoff* 過程ハ殆ド完全連続ナモノト完全ニ完全連続ナラザルモノトノ両極端デ此ノ中間ニ位スルモノガナイ訳デアリマス。而モ前者ハ *indeterministic* 後者ハ *deterministic*（流レ）デアルノデスガ中間的ナモノハナイモノデセウカ。

$\boxed{\text{Riesz ノ約束}}$　論文ノ最後ニ，此次ノ *paper* ニ $L(0,1)$ヲ抽象化シテソコデノ *ergodic theorem* ヲ出スト述ベテアリマス。期待シテヲル次第デス。