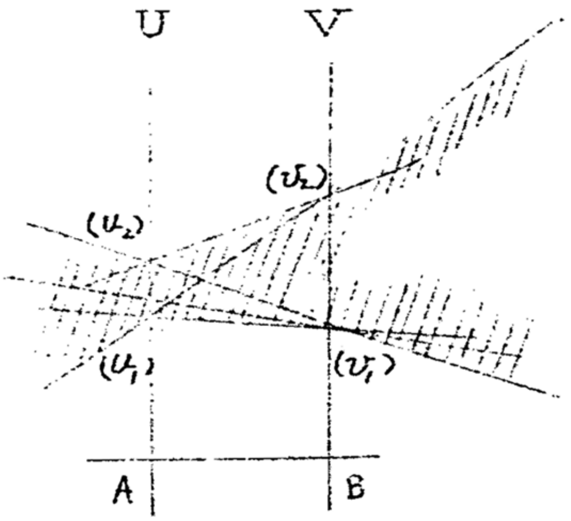
783. 微分幾何學ト双對原則（I）

淩部　重勝

代數曲線論，*nomographie* ニ見ル双對原則ヲ或ル形デ微分幾何學ニ持チ込マウトイフ算段ヲ述べサセテ戴キマス。話ハ結局 Blaschke; Differentialgeometrie II*ヲ双對原則ノ名ノ下ニ如何ニ焼直サントスルカヲ述ベルコトニ過ギマセン。

§1. 直線ノ集合ノ測度



直線ヲ *nomographie* ノ平行座標ヲ用ヒテ與ヘマス。軸 AU，BV 上ニ夫々區間 $[u_1, u_2]$，$[v_1, v_2]$ ヲ取リ，ソレ等ノ長サガ a，b デアルトスル。$[u_1, u_2]$ ノ任意ノ一點ト $[v_1, v_2]$ ノ任意ノ一點トヲ結ンデ出來ル全直線ノ集合 —— コレヲ M ト表ハス —— ニ測度ナルモノヲ考ヘルコトトシ，ソレヲ $a \cdot b$ ト定義スル。

$$(1)\qquad \mathfrak{M}(M) = a \cdot b$$

トデモ表ハシマセウカ。

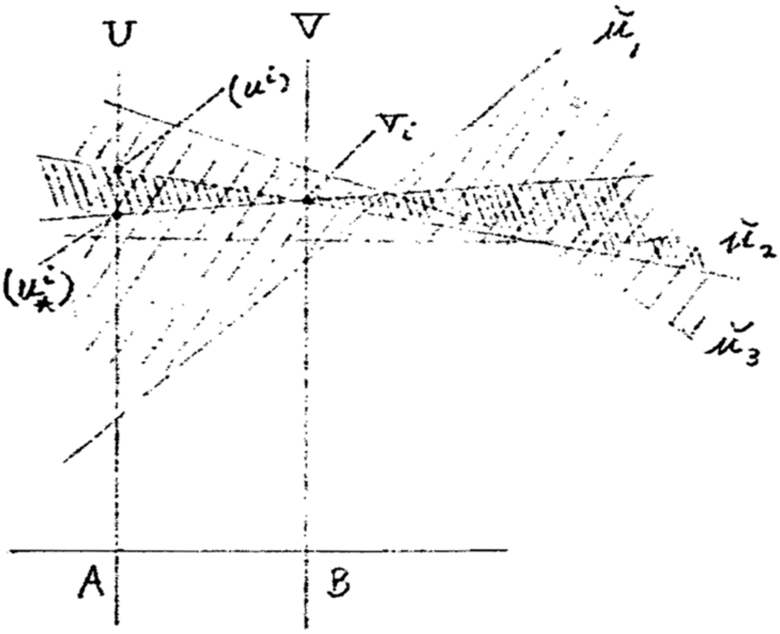
---

* 以下 Blaschke, Differentialgeometrie II ヲ B.D.II ト略記スル。

次ニ三直線 $\check{u}_1=(u_1, v_1)$, $\check{u}_2=(u_2, v_2)$, $\check{u}_3=(u_3, v_3)$ ヲ取ル。一應話ヲ簡單ニスルタメニ $u_1<u_2<u_3$, $v_1<v_2<v_3$ トスル。然ルトキ直線

$$(2)\quad \check{u}=\frac{\lambda_1\check{u}_1+\lambda_2\check{u}_2+\lambda_3\check{u}_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\quad(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\geqq 0)$$

ノ全体ノ集合ヲ M_{123} ト表ハス —— M_{123} ニ属スル直線ノ



全体ハ圖ノ影ヅケラレタ部分ヲ塗リツブスコトデアリマセウ——。

シカルトキハ上述ノ定義ニヨツテ M_{123} ニ測度ヲ考ヘルコトガ出來テソレハ次ノ(3)デ與ヘラレル。

$$(3)\quad \boxed{\mathfrak{m}(M_{123})=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_1, & v_1, & 1\\ u_2, & v_2, & 1\\ u_3, & v_3, & 1\end{vmatrix}}$$

(3)ハ特別ニハ(3')トナル。

(3′) $\begin{vmatrix} u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \\ u_3, & v_3, & 1 \end{vmatrix} = 0$ ナラバ三直線 $\check{u}_1, \check{u}_2, \check{u}_3$ 一点ニ會シ M_{123} ハ点* ノ一部分ヲナス

サテ(3)ノ証明ニ進ム。 區間 $[v_3, v_1]$ ヲ n 分シテ分点ヲ $V_i = (v_i)$ トスル。區間 $[u_3, u_1]$ ニ適當ニ小區間 $[u^i, u^i_*]$ ヲ考ヘルトキハ点 $V_i[u^i, u^i_*]$ ハ点 V_i ヲ通ル M_{123} ニ屬スルモノノ全体デアルヤウニスルコトが出來ル。u^i, u^i_* ハ區間 $[v_3, v_1]$ ヲ n 等分デモスルトキハ容易ニ計算スルコトが出來，從ツテ $[u^i, u^i_*]$ ノ長サ δ_i モ求メラレルコトニナル。 ココニ至ツテ、上述ノ測度ノ定義ヲ用ヒルナラバ

$$\sum_i \delta_i \left(v^{(i+1)} - v^{(i)}\right) \longrightarrow \mathfrak{m}(M_{123}) \left(\begin{array}{l} i \longrightarrow \infty, \\ v^{(i+1)} - v^{(i)} \longrightarrow 0 \end{array} \right)$$

ト考ヘラレ，又コレカラ直ニ

$$\mathfrak{m}(M_{123}) = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \\ u_3, & v_3, & 1 \end{vmatrix} > 0$$

ヲ得ル。

サテ M_{123} ニ於テ λ_i ノ少ナクトモ一ツヲ 0 トシテ得ラ

---

* dual ナ意味デノ点。 $V_i[u^i, u^i_*]$ ハ点 V_i ノ一部分デ區間 $[u^i, u^i_*]$ ニ交ルモノノ全体。

レル M_{123} ノ部分集合ハ M_{123} ノ *frontière* ト考ヘテヨク，何レノ λ_i モ 0 デナイ M_{123} ノ部分集合ハ M_{123} ノ *intérieure* デアラウ。*intérieure* 0 ナラヌ直線ノ集合。

topologisch ナ直線ノ集合。（初メカラ判リキッタコト？）

サラハ又，M_{123} ト云ッタモノヲ基礎ニ置イテ考ヘルコトノ出來ル様ナ或ル種ノ集合 M

即チ
$$\sum_{\alpha} M_{123}^{\alpha} = M$$

デアル M，$\sum_{\alpha}$ ノ如何ニ依ッテハ *topologisch* ト云ッテイ〻デアラウ集合 M ヲ考ヘ。併セテ

$$\mathfrak{M}(M_{123}) = \int_{M_{123}} du\,dv \quad \left(\int \text{ハ Riemann 積分}\right)$$

ト表ハスコトニスルナラバ，M ノ測度ハ

$$(4) \qquad \sum_{\alpha} \int_{M_{123}^{(\alpha)}} du\,dv \longrightarrow \mathfrak{M}(M)$$

ガ存在スルカ否カニ依ッテ云々スルコトガ出來ヤウ。

更ニ一般ニハ軸ニ平行スル直線ヲ除イタ直線ノ全体ハ $\mathbb{U} \times \mathbb{V}$ —— $\mathbb{U}$ ハ AU 上ノ点ノ集合，$\mathbb{V}$ ハ BV 上ノ点ノ集合 —— ト考ヘラルベク，又 $\mathbb{U}$ ニ属スル集合，$\mathbb{V}$ ニ属スル集合ノ或ル意味ニ於ケル夫々ノ *Meßbarkeit* ヲ云々スルコトニ依リ，且ツハ又 $\mathbb{U} \times \mathbb{V}$ ニ属スル集合 M ノ *Meßbarkeit* ヲ云々スルコトニ依リ，M ノ測度ヲ Riemann

積分ナラヌ積分ヲ用ヒテ考ヘラレルデアラウコト勿論デアル。

§2. 測度ト座標ノ変換

measurable ナ集合Mノ測度ヲ(4)ノ如リ表ハスナラバ坐標ノ変換，否直線ノ変換 $\mathfrak{u}\longrightarrow\mathfrak{u}_*$

$$
(5)\quad \begin{cases} u=\varphi(u^*,\ v^*) \\ v=\psi(u^*,\ v^*) \end{cases}
$$

ニ際シテ集合Mガ集合M^*トナルトキ，積分 $\int_M f(u,v)\,du\,dv$ ハ次ノ変換ヲ受ケルコト勿論デアル。

$$
(6)\quad \int_M f(uv)\,du\,dv=\pm\int_{M^*} f(\varphi,\psi)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(u^*v^*)}\right| du^*dv^*
$$

特別ニ変換ガ

$$
(7)\quad \begin{cases} u=\alpha u^*+\beta v^*+\rho \\ v=\gamma u^*+\delta v^*+\sigma, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}=1
$$

ナラバ

$$
\int_M du\,dv=\int_{M^*} du^*dv^*
$$

デアッテ

(8) $\boxed{\text{Mノ測度ハ変換(7)ニ依ツテ不変デアル.}}$

茲ニ到ッテ我々ハ B・D・Ⅱ ヲ全ク合或ハ或ル程度ニソレノ *dual* ナモノニ焼直シ得ルトノ見込ヲ持ツコトガ出來ル。何故ナラ B・D・Ⅱ^* ヲ作リ上ゲテクレルモノノ総テハ(3),(8)

ノ dual ナモノニ盡キテヰルト言ヒ得ルカラ。モシ言ヒ過ギヲ恐レナイナラバ。

本空間ノ話モ平行ニ進メルコトガ出来ル。

空間ノ平行座標ハ最モ一般ナ4変数ノ方程式ノ共線法ニ依ル Nomogramme 作成ニ極メテ有效ニ役立ツ。