1784. Birkhoff ergodic theorem ト maximal ergodic theorem. I

吉田 耕作, 角谷 静夫 (阪大)

近着ノ Duke Math. J. 5, 1 (1939) = N. Wiener ガ The ergodic theorem ナル標題デ興味アル論文ヲ書イテヲリマス。例ノ Wiener 流ノ不等式計算デ Birkhoff ergodic theorem, von Neumann ergodic theorem ノ別証明拡張等ヲヤッテヲリマス。

其ノ von Neumann ergodic theorem ノ multi-dimension ヘノ擴張ハ吾々ノ mean ergodic theorem ノ証明(談話720)法カラ見レバ trivial ナ擴張デアリマス。

Lebesgue 積分ノ定理トシテ面白イノハ Wiener ノ定理 IV デアリマス。即チ

定理 I (Wiener). Lebesgue measure ノ定義セラレル空間 S ($\mathrm{mes}(S) = \mathit{finite}$ トスル) ノ S ヘノ one-to-one measure preserving 変換 T ヲ考ヘル.[1] S デ可積分ナ $f(x)$ ヲ S 全体デ $f(x) \geqq 0$ トスルト

$$f^*(x) = \underset{1 \leqq n < \infty}{\mathrm{l.u.b.}} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$$

ト置クトキ

$$\int_S f(x)\,dx \geqq \alpha\ mes\left\{E^*(\alpha)\right\},$$
$$E^*(\alpha)=\underset{x}{E}\{\,f^*(x)>\ \}.$$

之ノ系トシテ

定理2. 上ニ於テ f ガ L^p ($p>1$) class ニ属スルナラバ, 即チ $\int_S f^p(x)\,dx<\infty$ ナラバ $f^*(x)$ モ亦 L^p class ニ属スル。若シ f ガ Zygmund class ニ属スルナラバ即チ $\int_S f(x)\log^+ f(x)\,dx<\infty$ ナラバ $f^*(x)$ ハ L^1 class ニ属スル。

尚 Wiener ハ上ノ定理1ト mean ergodic theorem トヲ組合セテ Birkhoff ergodic theorem ノ別証明ヲ與ヘテヲリマス。即チ

定理3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$ ガ殆ンド全ベテノ $x\in S$ ニ於テ存在スル。

Wiener ノ定理1ノ証明ハ Hardy-Littlewood ノ maximal theorem ヲ用ヒルノデアリマス。尚注意スベキハ深宮政範氏ガ同ジク maximal theorem ヲ用ヒテ定理2ヲ Wiener ト独立ニ得テヲラレルコトデアリマス（勿論同氏ハ定理1ヲ得テハ居ラレマセンノデ

Wiener ノ方ガ結果ハ良イデスガ)。

所ガ maximal theorem ノ証明ナルモノハ Khintchine-Kolmogoroff ニヨル Birkhoff ergodic theorem ノ証明ト全ク同ジヤウナ idea ニヨッテヰルノデスカラ, maximal theorem ヲモ mean ergodic theorem ヲモ使ハズモ直接ニ定理1, 3ヲ得ラレナイカト考ヘテミタラ次ノ如ク定理1ガ大分一般ナ形ニ拡張サレマシタ。之レヲ maximal ergodic theorem ト云ッテハドウデセウカ。証明ノ方法ハ談話729ニ紹介シタ Kolmogoroff ニヨル Birkhoff ergodic theorem ノ証明ノ modification ニ過ギマセン。

> 定理4. (Maximal ergodic theorem).
>
> 定理1ト同ジ notation ヲ使ヒマス。但シ mes(S) = finite モ $f(x) \geqq 0$ on S モ假定シマセン。
>
> コノトキ
>
> $$\int_{E^*(\alpha)} f(x)\,dx \geqq \alpha \operatorname{mes}\left\{E^*(\alpha)\right\}.$$

$\boxed{\text{注意}}$ $f(x) \geqq 0$ ヲ假定シナイカラ

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{E_*(\alpha)} f(x)\,dx \leqq \alpha \operatorname{mes}\left\{E_*(\alpha)\right\}, \quad E_*(\alpha) = \mathop{E}_{x}\left\{ f_*(x) < \alpha \right\} \\ \displaystyle f_*(x) = \mathop{g.l.b.}_{1 \leqq n < \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \end{cases}$$

モ云ヘル譯デス.

$\boxed{\text{証明}}$

$$f_{ab}(x)=\frac{1}{b-a}\sum_{i=a}^{b-1}f(T^i x) \qquad (b>a)$$

ト置キマス, x_0 ヲ fix シタトキ $f_{ab}(x_0)>\alpha$ 且ツ $f_{ab'}(x)\leqq\alpha$ for all $b'<b$ ナル如キ $a<b$ ガアッタトキ (a,b) ヲ x_0 ニ對應スル maximal interval, $(b-a)$ ヲ其ノ長サト云フコトニスル。二ツノ maximal intervals (a,b), (a',b') ハ一方ガ一方ヲ含ムコトハアッテモ互ニ重ナリ合フコトハナイ. 何者,

$a<a'<b<b'$ トスルト

$$f_{ab}(x_0)=\frac{(a'-a)f_{aa'}(x_0)+(b-a')f_{a'b}(x_0)}{b-a}$$

ヲ得ルカラ, ヨッテ長サ s ヲ越エヌ maximal interval デ長サ s ヲ越エヌ他ノ maximal interval ニハ決シテ含マレヌ如キモノヲ s-maximal interval ト呼ブコトニスルト, s-maximal intervals ハ互ニ離レテヰル。

今 $x_0\in S$ ニ對シテ $a\leqq 0<b$ ナル如キ s-maximal interval (a,b) ノ對應スル如キ x_0 ノ全体ヲ $E^*_s(\alpha)$ ト置クト明ニ

$$E^*_s(\alpha)\subseteqq E^*(\alpha) \quad 且 \quad \lim_{s\to\infty}E^*_s(\alpha)=E^*(\alpha)$$

$E^*_s(\alpha)$ ハ互ニ共通点持タヌ $E^*_{pq}(\alpha)$ ニ分解スル;

$$E_s^*(\alpha) = \sum_{q=1}^{s} \sum_{p=0}^{q-1} E_{pq}^*(\alpha),$$

コヽニ $E_{pq}^*(\alpha)$ ハ $(-p, -p+q)$ ナル如キ s-*maximal interval* ノ對應スル如キ $E^*(\alpha)$ ノ点 x_0 ノ全体デアル。

$$\frac{1}{q} \sum_{i=-p}^{-p+q-1} f(T^i x) = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} f(T^i \cdot T^{-p} x)$$

デアルカラ

$$T^{-p} \cdot E_{pq}^*(\alpha) = E_{0q}^*(\alpha)$$

又 T ガ *measure-preserving* ト云フコトカラ，上式ニヨリ，

$$\begin{cases} mes\left(E_{pq}^*(\alpha)\right) = mes\left(E_{0q}^*(\alpha)\right) \\ \displaystyle\int_{E_{pq}^*(\alpha)} f(x)\,dx = \int_{E_{0q}^*(\alpha)} f(T^p x)\,d(T^p x) = \int_{E_{0q}^*(\alpha)} f(T^p x)\,dx. \end{cases}$$

故ニ

$$\int_{E_s^*(\alpha)} f(x)\,dx = \sum_{q=1}^{s} \sum_{p=0}^{q-1} \int_{E_{pq}^*(\alpha)} f(x)\,dx = \sum_{q=1}^{s} \sum_{p=0}^{q-1} \int_{E_{0q}^*(\alpha)} f(T^p x)\,dx$$

$$= \sum_{q=1}^{s} \int_{E_{0q}^*(\alpha)} q f_{0q}(x)\,dx > \sum_{q=1}^{s} \int_{E_{0q}^*(\alpha)} q\alpha\,dx$$

$$= \sum_{q=1}^{s} q\alpha\, mes\left(E_{0q}^*(\alpha)\right) = \alpha \sum_{q=1}^{s} \sum_{p=0}^{q-1} mes\left(E_{pq}^*(\alpha)\right)$$

$$= \alpha\, mes\left(\sum_{q=1}^{s} \sum_{p=0}^{q-1} E_{pq}^*(\alpha)\right) = \alpha\, mes\left(E_s^*(\alpha)\right)$$

即チ. $\int_{E_s^*(\alpha)} f(x)\,dx > \alpha \, mes\left(E_s^*(\alpha)\right)$. $s \to \infty$ ナラシメテ

$$\int_{E^*(\alpha)} f(x)\,dx \geqq \alpha \, mes\left(E^*(\alpha)\right)$$

—— 以上 ——