792. 解析算法ニ就イテ, I

近藤　基吉 (北大)

F. Hausdorff, W. Sierpinski, L. Kantorovitch, E. Livenson等ニヨツテナサレタ解析算法ノ研究ハ未ダ極ク初期ノ状態デ注目スベキ結果ガ出テ居ナイガ,

今後記述的集合論デ重要ナル位置ヲ占メルニ至ルト思フ。私ハ射影集合ヲ研究スル準備トシテコノ頃コノ方面ノ問題ヲ考ヘテ見タカラ今マデニ得ラレタ結果ヲ此処デ書イテ見タイト思フ。

此ノ算法ノ研究ハ従来集合ノ場合ノミガ考察サレテ居タノデアルガ、コノ場合ヨリモ函数ノ場合ヲ先ニ考察スルノガ研究ノ順序デアルト思フノデ此処デハソノ方法ニヨリタイ。我々ハ先ヅ研究ノ目標ヲオカナケレバナラナイガ、最初ノ目標ヲ Baire ノ函数ニ関スル H. Lebesgue 氏ノ理論ノ解析算法ヘノ拡張ニオキタイト思フ。

1. 解析算法ノ定義　R ヲ空間トスル、R デ定義サレタ一價実函数ノ列 $\{F_n(x)\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ カラ R デ定義サレタ一價實函数ヲ構成スル算法 $\Phi(F_n(x))$ ノ中デ R ノ各点 x_0 ニ於イテ $\Phi(F_n(x))$ ノ與ヘル値 $\Phi(F_n(x)\ x_0)$ ガ $F_n(x)$ ガ $F_n(x)$ ノ点 x_0 ニ於ケル値 $F_n(x_0)$ ノミデ決定サレルモノヲ（R デ定義サレタ）解析算法ト云フ。

コノ場合算法 $\Phi(F_n(x))$ ハ点 x_0 ニ於イテ実数列 $\{F_n(x_0)\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ カラ実数 $\Phi(F_n(x);x_0)$ ヲ構成スル実数ニ関スル算法ト考ヘラレル。従ッテ点 x_0 ニ對シテ実数列 $\{y_n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ カラ実数 $\Phi_{x_0}(y_n)$ ヲ構成スル算法ヲ適當ニ選ンデ

$$\Phi(F_n(x);x_0)=\Phi_{x_0}(F_n(x_0))$$

ガ成立スルヤウニ出来ル。今後記号ヲ簡單ニシテ $\Phi(F_n(x);$

x_0）ヲ $\Phi(F_n(x_0))$ デ示スコトニスル。此処デ $\Phi_x(y_n)$ ノコトヲ $\Phi(F_n(x))$ ノ点 x ニ於ケル局所算法ト云フ。解析算法ガ與ヘラレルトキニハソノ局所算法ハ一義的ニ決定セラレ、逆ニ R ノ各点 x ニ実数ニ関スル算法 $\Phi_x(y_n)$ ヲ任意ニ與ヘルトキニ是ヲ局所算法トスル解析算法ガ一義的ニ決定サレル。

此処デ二ツノ場合ガ考ヘラレル、其ノ一ツハ $\Phi(F_n(x))$ ノ局所算法 $\Phi_x(y_n)$ ガ R ノ点 x ニ関係シナイ場合デアリ、他ノ一ツハサウデナイ場合デアル。前ノ場合局所算法 $\Phi_x(y_n)$ ヲ簡単ニ $\Phi(y_n)$ デ示シ，$\Phi(F_n(x))$ ハ homogène デアルト云フ。

注意. コノ定義ハ L. Kantorovitch, E. Livenson 両氏ノ集合ニ関スル解析算法ノ定義ヲ函数ノ場合ニ移行シタモノデアル。但シ我々ノ解析算法ハ両氏ノ quasi-analytic operation ニ相當シ、homogène ナ解析算法ガ analytic operation ニ相當シテ居ル。

2. 局所算法ノ構造 此処デ先ヅ問題トナルコトハ解析算法ノ構造デアル。シカルニ解析算法ハ其ノ局所算法ニヨツテ一義的ニ決定セラレ、局所算法ハ実数ニ関スル算法デアルカラ、此ノ算法ノ構造ヲ研究スレバ我々ノ目的ハ達セラレル。実数ニ関スル算法ハ無限個ノ独立変数ヲ有スル函数デアルカラ、コレヲ函数トシテ取扱フコトニシヨウ。其処デ是ニ連続ノ概念ヲ導入スル。其ノタメニ実数列ノ空間 R ヲ考ヘル。R ノ数列ノ間

ニ距離ノ概念ヲ次ノヤウニ定義スル。即チRノ二ツノ数列$\{x_n^{(k)}\}$ ($k=1,2$; $n=1,2,\cdots\cdots$) ニ対シテ

$$dis\left(\{x_n^{(1)}\},\ \{x_n^{(2)}\}\right)=b_n\cdot s\cdot \nu\left(x_n^{(1)},\ x_n^{(2)}\right)$$

トスル。但シ

$$\nu(x,\ y)=|\nu(x)-\nu(y)|;$$

$$\nu(x)=\frac{x}{1+|x|}\ (x\neq\pm\infty),\quad \nu(\pm\infty)=\pm 1$$

デアル。シカルトキニRハ完備距離空間デアル。シカシ可分デハナイ。今実数ニ関スル算法$\Phi(y_n)$ノ定義域ヲD($\subset$R)トスル。$\Phi(y_n)$ガDノ数列$\{y_n^{(0)}\}$($n=1,2,\cdots\cdots$)デ連続デアルト云フノハ$\varepsilon>0$ニ對シテ$\delta>0$ヲ選ンデ

$$dis\left(\{y_n^{(0)}\},\ (y_y)\right)<\delta,\quad \{y_n\}\in D$$

ノトキニ$\nu\left(\Phi(y_n^{(0)}),\ \Phi(y_n)\right)<\varepsilon$トナシ得ルコトデアル。$\Phi(y_n)$ガDノ凡テノ数列デ連続デアルトキニ$\Phi(y_n)$ハ連続デアルト云フ。

実数ニ関スル連続ナル算法ノ中デ特ニ重要ト思ハレルモノハ opération arithmétique ト opération topologique デアル。此処デ opération arithmétique ト云フノハ次ノ六種類ノ算法

1°. $a+x$, 2°. ax, 3°. x_1+x_2, 4°. x_1-x_2,

5°. $x_1\times x_2$, 6°. $x_1\div x_2$ (但シaハ常数)

デアル，次ニ opération topologique ノ定義ヲ與ヘテ置カウ，Rデ連続ナル算法$\Phi(y_n)$ガ條件『任意ノ単調増加連続函數$x(t)$ ($-\infty\leqq t\leqq+\infty$) ニ對シテ

$$\chi(\text{亜}(y_n)) = \text{亜}(\chi(y_n))$$

ガ常ニ成立スル』ヲ満足スルトキニ topologique デアルト云フ。opération topologique ノ例トシテ

$\underset{n}{b.s.}\, y_n$; $\underset{n}{b.i.}\, y_n$; $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$; $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$ 等ヲ上ゲルコトガ出来ル。

此処デ opération topologique ノ構造ヲ考ヘテ置キタイ。其ノタメニ先ヅ定義ヲ與ヘル。

定義: $\mathfrak{N}$ ヲ 0 ト 1 トノ間ニアル無理数カラナル空デナイ集合トスルトキニ

$$\text{亜}(y_n) = \underset{(n_1, n_2, \dots)\in\mathfrak{N}}{b.\ s.} \left\{ \underset{k}{b.\ i.}\ y_{n_k} \right\}$$

ヲ実数ニ関スル Hausdorff ノ算法。$\mathfrak{N}$ ヲ其ノ底ト云フ。

注意. コノ定義ハ集合ニ関スル Hausdorff ノ算法ヲ実数ノ場合ニ移行シタモノデアル。

定理1. Rデ定義サレタ実数ニ関スル算法亜(y_n)ガ topologique デアルガタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ亜(y_n)ガ実数ニ関スル Hausdorff ノ算法デアル事デアル。

証明: 十分條件ナルコト。亜(y_n)ヲ實数ニ関スル Hausdorff ノ算法、$\mathfrak{N}$ヲソノ底トスル。

今単調増加連続函数 $\chi(t)$ $(-\infty \leqq t \leqq +\infty)$ ヲ與ヘテ亜$(\chi(y_n))$ヲ考ヘル。

然ルトキニハ

$$亜(\chi(y_n)) = \underset{n}{b.s.}\{\underset{k}{b.i.}\,\chi(y_{n_k})\} = \underset{n}{b.s.}\,\chi(\underset{k}{b.i.}\,y_{n_k})$$

$$= \chi(\underset{n}{b.s.}(\underset{k}{b.i.}\,y_{n_k})) = \chi(亜(y_n))$$

デアル。他方面デ実数列$\{y_n^{(0)}\}$ $(n=1,2,\text{-----})$ ト $\varepsilon>0$ トヲ與ヘテ $dis((y_n^{(0)}),(y_n))<\varepsilon$ ノ成立スル実数列$\{y_n\}$ $(n=1,2,\text{-----})$ ヲ考ヘル。$\nu(y_n^{(0)},y_n)<\varepsilon$ $(n=1,2,\text{-----})$ デアルカラ $\nu(y_n^{(0)})<\nu(y_n)+\varepsilon$ $(n=1,2,\text{-----})$ デアル．故ニ $亜(\nu(y_n^{(0)}))\leqq 亜(\nu(y_n)+\varepsilon)$ デアル，然ルニ $\nu(t)$，$\nu(t)+\varepsilon$ ハ共ニ単調増加連続デアルカラ今証明シタ結果ニ依ッテ $\nu(亜(y_n^{(0)}))\leqq\nu(亜(y_n))+\varepsilon$．同様ニ $\nu(亜(y_n))\leqq\nu(亜(y_n^{(0)}))+\varepsilon$ ガ得ラレ $\nu(亜(y_n^{(0)}),亜(y_n))\leqq\varepsilon$ デアル。故ニ$亜(y_n)$ハ連続デ従ッテ *topologique* デアル。

必要條件ナルコト．$亜(y_n)$ヲ *opération topolgique* トスル．無理数 $(n_1,n_2,\text{-----})$ デ條件『実数列$\{y_n^{(0)}\}$ $(n=1,2,\text{-----})$ ト実数 r トヲ適當ニ選ンデ $亜(y_n^{(0)})>r$，$y_{n_k}^{(0)}>r$ $(k=1,2,\text{-----})$ 及ビ $y_n^{(0)}\leqq r$ $(n\neq n_k)$ トナシ得ル』ヲ満足スルモノノ集合ヲ $\mathfrak{N}$ トスル．然ルトキニ $\mathfrak{N}\neq 0$ デアル．何トナレバ、$y_n^{(0)}=0$ $(n=1,2,\text{-----})$，$\chi(t)=2t$ トスレバ $\chi(亜(y_n^{(0)}))=亜(\chi(y_n^{(0)}))$，或ヒハ $2亜(y_n^{(0)})=亜(y_n^{(0)})$ ガ成立シ $亜(y_n^{(0)})=0$ デアル．故ニ $y_n^{(0)}>-1$ $(n=1,2,\text{-----})$，$亜(y_n^{(0)})>-1$ ガ成立シテ $(1,2,3,\text{----})\in\mathfrak{N}$ デアル．即チ $\mathfrak{N}\neq 0$ デアル。

其処デ実数ニ関スル算法$亜(y_n)$ヲ次ノヤウニ定義スル．

即チ，実数列 $\{y_n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ニ對シテ $y_{n_k}>r$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$，$y_n\leqq r$ $(n\neq n_k)$ $(n_1,n_2,\cdots\cdots)\in\mathfrak{N}$ ノ成立スル実数 r ノ存在シナイトキニハ 亚$(y_n)=-\infty$，然ラザルトキニハ

$$(1)\quad 亚(y_n)=\underset{r}{\mathrm{b.s.}}\{y_{n_k}>r\ (k=1,2,\cdots\cdots),\ y_n\leqq r\ (n\neq n_k),\ (n_1,n_2,\cdots\cdots)\in\mathfrak{N}\}$$

トスル。然ルトキニハ 亜$(y_n)\equiv$亚(y_n) が成立スル．之レヲ証明スルタメニ先ヅ 亜$(y_n)\geqq$亚(y_n) ヲ証明スル。

実数列 $\{y_n^{(0)}\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ニ對シテ 亚$(y_n^{(0)})=-\infty$ ノ時ニハ明カニ 亜$(y_n^{(0)})\geqq$亚$(y_n^{(0)})$ が成立スル。次ニ 亚$(y_n^{(0)})>-\infty$ ノトキヲ考ヘル，コノ場合ニハ 亚(y_n) ハ(1)デ定義サレテ居ル。其処デ $y_{n_k}^{(0)}>r$，$y_n^{(0)}\leqq r(n\neq n_k)$，$(n_1,n_2,\cdots\cdots)\in\mathfrak{N}$ ノ成立スル任意ノ実数 r ヲ取ル。$\mathfrak{N}$ ノ定義ニヨッテ実数列 $\{z_n^{(0)}\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ト実数 s トヲ選ンデ $z_{n_k}^{(0)}>s$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$，$z_n^{(0)}\leqq s$ $(n\neq n_k)$，亜$(z_n^{(0)})>s$ ノ成立スル様ニ出来ル。一般性ヲ失ハズニ $s=r$ ト假定スルコトが出来ル。何ントナレバ、定義ニ依ッテ実数列 $\{z_n^{(0)}+(r-s)\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ニ對シテ $z_{n_k}^{(0)}+(r-s)>r$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$，$z_n^{(0)}+(r-s)\leqq r(n\neq n_k)$，亜$(z_n^{(0)}+(r-s))=$亜$(z_n^{(0)})+(r-s)>r$ が成立スルカラデアル。

其処デ数列

$$z_n^{(1)}=y_n^{(0)}\ (n\neq n_k)\qquad z_{n_k}^{(1)}=z_{n_k}^{(0)}\ (k=1,2,\cdots\ )$$

ヲ映ヘテ單調増加連続函数 $\chi_1(t)=\max(t,\lambda)$ ヲ考ヘル.
假定ニヨッテ $y_n^{(0)}\leqq\lambda,\ z_n^{(0)}\leqq\lambda\ (n\neq n_k)$ デアルカラ $\chi_1(z_n^{(1)})=\chi_1(z_n^{(0)})\ (n=1,2,\dots\dots)$ デアル. ソレ故ニ

$$\chi_1(\text{亜}(z_n^{(0)}))=\text{亜}(\chi_1(z_n^{(0)}))=\text{亜}(\chi_1(z_n^{(1)}))$$
$$=\chi_1(\text{亜}(z_n^{(1)}))$$

ガ得ラレル。然ルニ $\text{亜}(z_n^{(0)})>\lambda$ デアルカラ $\chi_1(\text{亜}(z_n^{(0)}))>\lambda$ ガ成立シ従ッテ又 $\chi_1(\text{亜}(z_n^{(0)}))>\lambda$ デアル、ソレ故ニ $\text{亜}(z_n^{(1)})>\lambda$ ガ成立スル。

次ニ單調増加連続函数 $\chi_2(t)=\min(t,\lambda)$ ヲ考ヘル。

假定ニヨッテ $y_{n_k}^{(0)}\geqq\lambda,\ z_{n_k}^{(1)}\geqq\lambda\ (k=1,2,\dots\dots)$ デアルカラ $\chi_2(y_n^{(0)})=\chi_2(z_n^{(0)})\ (n=1,2,\dots\dots)$ デアル、ソレ故ニ

$$\chi_2(\text{亜}(y_n^{(0)}))=\text{亜}(\chi_2(y_n^{(0)}))=\text{亜}(\chi_2(z_n^{(1)}))$$
$$=\chi_2(\text{亜}(z_n^{(1)}))$$

ガ成立スル。然ルニ $\text{亜}(z_n^{(1)})>\lambda$ デアルカラ $\chi_2(\text{亜}(z_n^{(1)}))=\chi_2(\lambda)$ ガ得ラレ $\chi_2(\text{亜}(y_n^{(0)}))=\chi_2(\lambda)$ デアル. 之ニ依ッテ $\text{亜}(y_n^{(0)})\geqq\lambda$ ナルコトガ知ラレル。然ルニ λ ハ $\text{亚}(y_n^{(0)})\geqq\lambda$ ノ成立スル実数デ $\text{亚}(y_n^{(0)})$ ハコノ様ナ λ ノ上端トシテ定義サレルカラ $\text{亜}(y_n^{(0)})\geqq\text{亚}(y_n^{(0)})$ デアル。故ニ任意ノ実数列 $\{y_n\}\ (n=1,2,\dots\dots)$ ニ對シテ $\text{亜}(y_n)\geqq\text{亚}(y_n)$ デアル。

次ニ $\text{亚}(y_n)\geqq\text{亜}(y_n)$ ヲ証明スル。実数列 $\{y_n^{(0)}\}\ (n=1,2,\dots\dots)$ ニ對シテ $\text{亜}(y_n^{(0)})=-\infty$ ノ時ニハ $\text{亚}(y_n^{(0)})\geqq\text{亜}(y_n^{(0)})$

成立スルコトハ明カデアル。其処デ亜($y_n^{(0)}$)$>-\infty$ノ場合ヲ考ヘル。亜($y_n^{(0)}$)$>r>-\infty$ノ成立スル任意ノ実数rニ対シテ無理数($n_1, n_2, \ldots\ldots$)ヲ選ンデ$y_{n_k}^{(0)}>r$ ($k=1, 2, \ldots\ldots$), $y_n^{(0)} \leqq r$ ($n \neq n_k$)ノ成立スルヤウニ出来ル。何ントナレバ，此ノヤウナ無理数ノ存在シナイトキニハ$y_n^{(0)} \leqq r$ ($n=1, 2, \ldots\ldots$)デアル。故ニ単調増加連続函数$\chi(t)$ヲ定義シテ$t \leqq r$ノトキニ$\chi(t)=t$, $t>r$ノ時ニ$\chi(t)=2t-r$トスレバ，$\chi(y_n^{(0)})=y_n^{(0)}$デアルカラ亜($y_n^{(0)}$)=亜($\chi(y_n^{(0)})$)=$\chi$(亜($y_n^{(0)}$))ガ成立スル。然ルニ亜($y_n^{(0)}$)$>r$デアルカラ$\chi$(亜($y_n^{(0)}$))=2亜($y_n^{(0)}$)$-r$ガ得ラレ亜($y_n^{(0)}$)$=r$トナル。コレハ假定ト矛盾スル、ソレ故ニ要求ヲ満タス無理数ガ存在スル。夫レ故ニ定義ニ依ッテ亚($y_n^{(0)}$)$\geqq r$デアル。従ッテ亚($y_n^{(0)}$)$\geqq$亜($y_n^{(0)}$)ガ得ラレ常ニ亚(y_n)$\geqq$亜(y_n)ノ成立スルコトガ判ル。

夫レ故ニ以上ノ結果ヲ綜合シテ亜(y_n)$\equiv$亚(y_n)ガ導カレル。コノ結果ニ依ッテ亜(y_n)ガHausdorffノ算法デアルコトヲ証明スルニハ亚(y_n)ニ対シテ其ノコトヲ証明スレバヨイコトガ判ル。

其処デ$\mathfrak{N}$ニ対シテ実数ニ関スル算法亚*(y_n)ヲ定義シテ$y_{n_k}>r$ ($k=1, 2, \ldots\ldots$) ($n_1, n_2, \ldots\ldots$) $\in \mathfrak{N}$ノ成立スル実数rノ存在シナイトキニハ亚*(y_n)$=-\infty$, 然ラザル時ニハ

(2) 亚*(y_n)$=b_r s. \{ y_{n_k}>r \ (k=1, 2, \ldots), (n_1, n_2, \ldots) \in \mathfrak{N} \}$

トスル．然ルトキニハ 亜$(y_n) \equiv$ 亜$^*(y_n)$ デアル．定義ニ依ッテ 亜$^*(y_n) \geqq$ 亜(y_n) ナルコトハ明カデアル．次ニ 亜$(y_n) \geqq$ 亜$^*(y_n)$ ヲ証明スル．若シコレガ成立シナイトスレバ適当ナル実数列 $\{y_n^{(0)}\}(n=1,2,\cdots\cdots)$ ニ對シテ 亜$^*(y_n^{(0)}) >$ 亜$(y_n^{(0)})$ デアル．然ルトキニハ実数 r ト無理数 $(n_1, n_2, \cdots\cdots)$ トヲ選ンデ 亜$^*(y_n^{(0)}) > r >$ 亜$(y_n^{(0)})$, $(n_1, n_2, \cdots\cdots) \in \mathfrak{N}$, $y^{(0)}_{n_k} > r$ トナシ得ル．其処デ $y^{(0)}_{m_k} > r$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ $y_m^{(0)} \leqq r\ (m \neq m_k)$ ノ成立スル無理数 $(m_1, m_2, \cdots\cdots)$ ヲ考ヘル．コノ無理数ガ $n_k\ (k=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ含ンデシカモ $\mathfrak{N}$ ニ属サナイコトハ定義ヨリ明ラカデアル．今 $\{m_{\nu_k}\}\ (k=1,2,\cdots\cdots)$ デ $(n_1, n_2, \cdots\cdots)$ ニ含マレナイ m_k ヲ示ス．（コノ様ナ m_k ノ個数ニツイテハ有限個カ可附番個カ判ラナイガ存在スルコトハ確カデアル）其処デ実数列 $\{x_n^{(p)}\}\ (n=1,2,\cdots\cdots;\ p=0,1,2,\cdots\cdots)$ ヲ次ノ様ニ定義スル．即チ

$$x_{n_k}^{(p)}=1, \quad x_{m_{\nu_k}}^{(p)}=\frac{p}{p+1} \quad (k, p=1,2,\cdots\cdots),$$

$$x_n^{(p)}=0 \quad (n \neq m_k,\ p=0,1,2,\cdots\cdots)$$

$$x_{m_k}^{(0)}=1 \quad (k=1,2,\cdots\cdots)$$

然ルトキニハ空間 R ノ定義ニ依ッテ $\{x_n^{(p)}\}\ (p=1,2,\cdots\cdots)$ ハ $\{x_n^{(0)}\}$ ニ収斂スル．ソレ故ニ又 亜$(x_n^{(p)})\ (p=1,2,\cdots\cdots)$ ハ 亜$(x_n^{(0)})$ ニ収斂スル．然ルニ $\{x_n^{(p)}\}\ (p=0,1,2,\cdots\cdots)$ ノ定義ニヨッテ 亜$(x_n^{(p)}) =$ 亜$(x_n^{(p)}) = 1\ (p=1,2,\cdots\cdots)$ デ且ツ

$\Phi(x_n^{(0)}) = \Psi(x_n^{(0)}) = 0$ デアル。此ノ事実ハ前ノ結果ト矛盾スル，ソレ故ニ $\Psi(y_n) \geqq \Psi^*(y_n)$ ガ常ニ成立シ、従ッテ $\Psi(y_n) = \Psi^*(y_n)$ デアル，然ルニ $\Psi^*(y_n)$ ガ $\mathfrak{N}$ ヲ底トスル Hausdorff ノ算法デアルコトガ証明サレル。今 $\Psi^{**}(y_n)$ デ $\mathfrak{N}$ ヲ底トスル Hausdorff ノ算法トスル。然ルトキニ $\mathfrak{N}$ ノ任意ノ無理数 $(n_1, n_2, -----)$ ニ對シテ $y_{n_k} \geqq \underset{k}{b.i.}\, y_{n_k}$ $(k=1, 2, -----)$ デアルカラ $\Psi^*(y_n) \geqq \underset{k}{b.i.}\, y_{n_k}$ ガ成立シ，従ッテ $\Psi^*(y_n) \geqq \Psi^{**}(y_n)$ デアル，他方面ニテ $\Psi^*(y_n) > r$ ノ成立スル任意ノ実数 r ニ對シテ $y_{n_k} > r$ $(k=1, 2, -----)$ ノ成立スル無理数 $(n_1, n_2, -----)$ ガ $\mathfrak{N}$ ノ中ニ存在スル。ソレ故ニ $r \leqq \underset{k}{b.i.}\, y_{n_k} \leqq \Psi^{**}(y_n)$ ガ得ラレル. $\Psi^*(y)$ ハコノ様ナ r ノ上端デアルカラ $\Psi^*(y_n) \leqq \Psi^{**}(y_n)$ ガ成立シテ $\Psi^*(y_n) = \Psi^{**}(y_n)$ ナルコトガ判ル。故ニ $\Psi^{**}(y_n) \equiv \Psi^*(y_n) \equiv \Psi(y_n) \equiv \Phi(y_n)$ ニ依ッテ $\Phi(y_n)$ ハ Hausdorff ノ算法デアル。 —(証明了)—

次ニ一般ノ実数ニ関スル算法ノ構造ヲ考察シヨウ。$\Phi(y_n)$ ヲ R ノ部分集合 D デ定義サレタ実数ニ関スル算法トスル。今 $\Phi(y_n)$ ヲ R 全体ニ拡ゲテ $R-D$ ノ数列 $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ ニ對シテ 0 ガ對應スル様ニスル. 此ノ新シキ算法ヲ $\Phi^*(y_n)$ デ示ス。

任意ノ自然数 p ニ対シテ集合

$$E_n^{(p)} = E_{no}\left\{\Phi^*(y_n) \geqq \frac{n}{p}\right\} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

$$E_{-\infty}^{(p)} = E_{no}\left\{\Phi^*(y_n) = -\infty\right\}$$

[illegible]数ヲ夫々 $\Phi_n^{(p)}(y_n)$ トスル時ニハ

$$\Phi^{(p)}(y_n) = \underset{n}{b.s.}\left\{\frac{n}{p}\Phi_n^{(p)}(y_n),\ \underline{\lim}_{n\to\infty} - n\,\Phi_{-\infty}^{(p)}(y_n)\right\}$$

ニ對シテ $\Phi^{*}(y_n) = \overline{\lim}_{p\to\infty}\Phi^{(p)}(y_n)$ ガ得ラレル．然ルニ $\underset{n}{b.s.}\, y_n$，$\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$，$\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n$ ハ opération topologique デアルカラ、$\Phi^{*}(y_n)$ ハ $\Phi_n^{(p)}(y_n)$ ノ上ニ opération arithmétique ト opération topologique トヲ施シテ得ラレル．故ニ $\Phi^{*}(y_n)$ ノ構造ハ $\Phi_n^{(p)}(y_n)$ ノ構造ニ依ッテ知ラレル。然ルニ $\Phi_n^{(p)}(x_n)$ ハ R ノ部分集合ノ特性函数デアルカラ，我々ノ問題ハ R ノ部分集合ノ特性函数ノ構造ヲ知ルコトニ帰着サレル。

先ヅ R 上ニアル矩形ノ特性函数ヲ考ヘル。此処デ矩形ト云フノハ二ツノ實數 a_k，b_k $(a_k \leqq b_k)$ ト自然数 n_k トノ組ノ有限列 $\{(a_k, b_k; n_k)\}$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, \eta)$ ニ對シテ $a_k \leqq y_{n_k} \leqq b_k$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, \eta)$ ヲ滿足スル數列 $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ノ集合ノコトデアル。$\eta=1$ ノ場合ニハ矩形ハ $a_1 \leqq y_{n_1} \leqq b_1$ ヲ滿足スル数列 $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ノ集合デアルカラ、其ノ特性函數 $\Phi(y_n; a_1, b_1; n_1)$ ハ y_{n_1} ノ上ニ opération arithmétique ト opération topologique トヲ施シテ得ラレル。ソシテ一般ノ矩形ノ特性函數ハ

$$\prod_{k=1}^{\eta}\Phi(y_n;\ a_k, b_k;\ n_k)$$

デ與ヘラレルカラ、矩形ノ特性函數ハ實數 y_1，y_2，$\cdots\cdots$ ニ opération arithmétique ト opération topologique

トヲ施シテ得ラレル。

次ニ R ノ任意ノ部分集合 E ノ特性函数 $\Phi(y_n)$ ヲ考ヘル。$-1 \leqq a_k \leqq +1$ $(k=1, 2, \cdots\cdots n)$ ヲ満足スル有理数 a_k $(k=1, 2, \cdots\cdots n)$ ニ対シテ $|\nu(y_k)-a_k| \leqq \frac{1}{n}$ $(k=1, 2, \cdots\cdots n)$ ヲ満足スル矩形ヲ $R(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)$ デ示ス。コレ等ノ矩形ノ集合ハ可附番デアルカラ、夫等ヲ列ニ置クコトガ出来ル。ソノ一ツヲ $\{R_n\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ トスル。然ルニ R ノ任意ノ一点 p ニ対シテ無理数 $(n_1, n_2, \cdots\cdots)$ ヲ選ンデ $(p)=\prod_{k=1}^{\infty} R_{n_k}$ ノ成立スル様ニナシ得ル。コノヤウナ無理数ノ全体ノ集合ヲ $\mathfrak{N}_p$ トスル。然ルトキニハ R ノ部分集合 E ニ対シテ

$$\mathfrak{N}=\sum_{p \in E} \mathfrak{N}_p$$

トスレバ、$E=\sum_{\mathfrak{N}} \prod_{k=1}^{\infty} R_{n_k}$ デアルカラ、R_n ノ特性函数 $\Phi_n(y_n)$ ニ対シテ

$$\Phi(y_n)=\underset{\mathfrak{N}}{l.s.}\{\underset{k}{l.i.}\Phi_{n_k}(y_n)\}$$

ガ成立スル。即チ $\Phi(y_n)$ ハ $\Phi_n(y_n)$ ノ上ニ *opération arithmétique* ト *opération topologique* トヲ施シテ得ラレル。ソレ故ニ以上ノ結果ヲ綜合シテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 2. <u>$\Phi(y_n)$ ヲ R ノ部分集合 D デ定義サレタ実数ニ関スル算法トスル時ニ R デ定義サレタ実数ニ関スル算法 $\Phi^*(y_n)$ デ次ノ條件ヲ満足スルモノガ存在スル。</u>

1°. Dノ凡テノ数列 $\{y_n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ニ對シテ $\Phi(y_n)\equiv\Phi^*(y_n)$ が成立スル。

2°. $\Phi^*(y_n)$ ハ実数 y_n $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ニ opération arithmétique ト operation topologique トヲ施シテ得ラレル。

3. 解析算法ノ構造 前節ノ結果ニ依ツテ解析算法ノ構造ヲ考ヘテ置カウ。先ヅ定義ヲ與ヘル。空間Rデ定義サレタル解析算法 $\Phi(F_n(x))$ ノ中デ次ノモノヲ opération arithmétique ト云フ。

1°. $A(x)+F(x)$, 2°. $A(x)\times F(x)$,

3°. $F_1(x)+F_2(x)$, 4°. $F_1(x)-F_2(x)$,

5°. $F_1(x)\times F_2(x)$, 6°. $F_1(x)\div F_2(x)$,

(但シ、$A(x)$ ハRデ定義サレタル一定ノ函数ヲ示ス)

又Rデ定義サレタル解析算法デ凡テノ局所算法が topologique ナルモノヲ operation topologique ト云フ。然ルトキニ次ノ結果が得ラレル。

定理3. 空間Rデ定義サレタル解析算法 $\Phi(F_n(x))$ ハ $F_n(x)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ニ opération arithmétique ト opération topologique トヲ施シテ得ラレル。

追記 実数ニ関スル算法 $\Phi(y_n)$ ガ條件

1°. $\Phi(y_n)$ ハRデ連続デアル。

2°. $\chi(t)$ ヲ $-\infty\leqq t\leqq+\infty$ デ単調増加連続ナル函数トスルトキニ $\chi(\Phi(y_n))=\Phi(\chi(y_n))$ デアル。

ヲ満足スルトキ＝ topologique デアルト定義シタガ此処デ 1° ノ方ハ 2° ノ方カラ導クコトが出来ル．

定理１ノ証明デ opération topologique $\Phi(y_n)$ が Hausdorff ノ算法デアルコトヲ示シタガ、ソノ中デ $\Phi(y_n)$ が R デ連続デアルコトヲ使ッタノハ $\Phi(y_n) \geqq \Phi^*(y_n)$ ノ証明ノ所デアッタ、（記号ハ定理１ノ証明中ノモノ＝依ル）併シナガラ、コノ部分ノ証明モ 2° ノミデ出来ル。之レヲ証明スル＝ハ $(n_1, n_2, \cdots\cdots) \in \mathfrak{N}$ ノトキ＝ n_k $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ含ム任意ノ無理数 $(m_1, m_2, \cdots\cdots)$ （此ノ意味ハ $n_k = m_{\nu_k}$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ノ成立スル ν_k $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ノ存在スレコトデアル）が $\mathfrak{N}$ ＝含マレルコトヲ示セバ十分デアル。今實数列 $\{y_n^{(0)}\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ選ンデ次ノ様＝スル。

$$m_{\nu_k} = 1 \qquad (k=1,2,\cdots\cdots)$$

$$m_j = \frac{1}{2} \qquad (j \neq \nu_k,\ k=1,2,\cdots\cdots)$$

$$n = 0 \qquad (n \neq m_k,\ k=1,2,\cdots\cdots)$$

然ルトキ＝ハ $(n_1, n_2, \cdots\cdots) \in \mathfrak{N}$ カラ $\Phi(y_n^{(0)}) = 1$ デアル．今単調増加連続函数ヲ定義シテ $t \geqq \frac{1}{2}$ ノトキ＝ $\chi(t) = 1$, $\chi(0) = 0$ トスレバ $\Phi(\chi(y_n^{(0)})) = \chi(\Phi(y_n^{(0)})) = 1$ デアル。然ル＝ $\Phi(y_n) \equiv \Phi(y_n)$ デアルカラ $\Phi(\chi(y_n^{(0)})) = 1$ が成立シ，且ツ

$$\chi(y_{m_k}^{(0)}) = 1 \quad (k=1,2,\cdots\cdots)$$

$$\chi(y_n^{(0)}) = 0 \quad (n \neq m_k)$$

デアルカラ、$\mathfrak{N}$ ノ定義＝ヨッテ $(m_1, m_2, \cdots\cdots) \in \mathfrak{N}$ デアル。