793. Birkhoff ergodic theorem ト Maximal ergodic theorem, II

吉田 耕作，角谷 静夫（阪大）

I. 前談話カラ $f(x) \in L^1$ ナラバ殆ド全テノ点 x デ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^i \cdot x) = f_1(x)$$

ガ存在スル。コノ $f_1(x)$ ニツイテ

$$(1) \quad \boxed{f_1(x) \in L^1}$$

ガ云ヘル。$f \geqq 0$ ノトキヲ考ヘレバ充分デアル。コノトキ

$$(2) \quad \boxed{\begin{cases} \int_S f_1(x)\,dx \leqq \int_S f(x)\,dx, & = \infty \text{ ノトキ} \\ \int_S f_1(x)\,dx = \int_S f(x)\,dx & = finite \text{ ノトキ} \end{cases}}$$

ヲ証明シヤウ。

（証明）任意ノ $0 < \alpha < \beta$ ニツイテ

$$\begin{cases} \alpha\, mes(E(\alpha,\beta)) \leqq \int_{E(\alpha,\beta)} f(x)\,dx \leqq \beta\, mes(E(\alpha,\beta)) \\ E(\alpha,\beta) = E_x\{\alpha < f_1(x) < \beta\} \end{cases}$$

ガ前談話カラ成立ツ。従ツテ特ニ $mes(E(\alpha,\beta)) = finite$ ナル故ニ積分ノ定義カラ

$$\int_{E(\alpha,\beta)} f_1(x)\,dx = \int_{E(\alpha,\beta)} f(x)\,dx,$$

從ッテ

$$\int f_1(x)\,dx = \int_{E(0,\infty)} f_1(x)\,dx = \int_{E(0,\infty)} f(x)\,dx \leqq \int f(x)\,dx$$

若シモ $\text{mes}(S) = \text{finite}$ ナラ $\int_S f_1(x)\,dx$

$= \int_S f(x)\,dx$ ガ成立ツ，何者，$f^{(n)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i x) \geqq 0$

且ツ $\int_S f^{(n)}(x)\,dx = \int_S f(x)\,dx$．　然シテ $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = f_1(x)$

almost everywhere ダカラ $\left\{\frac{f(x)+\cdots\cdots+f(T^n(x))}{n}\right\}$ ノ

equi-integrability ヲ用ヒ Egoroff ノ定理ヲ使フト直グワカル。

II. dominated ergodic theorem.

(3)

$f \geqq 0$ ガ L^1 ニモ $L^p\,(p>1)$ ニモ属スルトスルト $$f^*(x) = \underset{n}{l.u.b.}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i x) \in L^p$$

(4)

$f \geqq 0$ ガ L^1 ニモ Zygmund class ニモ属スルトスル[1] 然ラバ　$f^*(x) \in L^1$

---

(1) Zygmund class ニ属スルト云フノハ $\int f(x)\log^+ f(x)\,dx < \infty$ ナルコト。

証. $\underset{x}{E}\{f^*(x)>\alpha\}$ ナル set ヲ $M^*(\alpha)$ ト置クト前議話カラ

$$(5)\quad \int_{M^*(\alpha)} f(x)\,dx \geqq \alpha M^*(\alpha).$$

今

$$\begin{cases} h(x)=f(x) & \text{if} \quad f(x)>\dfrac{\alpha}{2} \\ \quad\ =0 & \text{if} \quad f(x)\leqq\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

ト置ケバ

$$f^*(x)\leqq h^*(x)+\frac{\alpha}{2}$$

従ッテ (5) カラ

$$\begin{cases} mes\ \underset{x}{E}\{f^*(x)>\alpha\}\leqq mes\ \underset{x}{E}\left\{h^*(x)>\dfrac{\alpha}{2}\right\} \\ \leqq \dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int_{h^*(x)>\frac{\alpha}{2}} h(x)\,dx \leqq \dfrac{2}{\alpha}\int h(x)\,dx \\ =\dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int_{f(x)>\frac{\alpha}{2}} f(x)\,dx \end{cases}$$

即チ $M(\alpha)=\underset{x}{E}\{f(x)>\alpha\}$ トヲイテ

$$(6)\quad \boxed{\alpha M^*(\alpha)\leqq 2\int_{f(x)>\frac{\alpha}{2}} f(x)\,dx=-2\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\infty} y\,d\,M(y).}$$

従ッテ<u>形式的</u>ニ $\nu>0$ トシテ

$$\int_0^\infty M^*(x)\,x^\nu\,dx\leqq -2\int_0^\infty x^{\nu-1}dx\left\{\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} y\,d\,M(y)\right\}$$

$$= -2^{\nu+1}\int_0^\infty x^{\nu-1}dx\left\{\int_x^\infty y\,dM(y)\right\}$$

$$= -2^{\nu+1}\int_0^\infty y\,dM(y)\left\{\int_0^y x^{\nu-1}dx\right\}$$

$$= -\frac{2^{\nu+1}}{\nu}\int_0^\infty y^{\nu+1}dM(y)$$

故＝ $\int f(x)^p dx = -\int_0^\infty y^p dM(y) = finite\ (p>1)$ ナラ

(η) $\int_0^\infty M^*(x)\,x^{p-1}dx = finite$

部分積分デハ

$$\int_\eta^\xi M^*(x)\,x^{p-1}dx = \left[\frac{x^p}{p}M^*(x)\right]_\eta^\xi - \int_\eta^\xi \frac{x^p}{h}dM^*(x)$$

故＝ $\lim_{\eta\to 0}\eta^p M^*(\eta) = 0$ 且ツ $\lim_{\xi\to\infty}\xi^p M^*(\xi) = exist$ トスレバ $-\int_0^\infty x^p dM^*(x) = \int\left\{f^*(x)\right\}^p dx$ exist スル。所が $M^*(x)$ 単調減少カラ (η) ＝ヨリ

$$\int_{\frac{\xi}{2}}^\xi M^*(x)x^{p-1}dx \geqq M^*(\xi)\int_{\frac{\xi}{2}}^\xi x^{p-1}dx = \frac{\xi^p}{p}M^*(\xi)\left\{1-\frac{1}{2^p}\right\}$$

ヲ得ル。此ノ左辺ハ $\xi\to+\infty$ ノトキ $\to 0$. 又同ジク $\lim_{\eta\to 0}\eta^p M^*(\eta) = 0$ ヲ得ルカラ結局

$$f^*(x) \in L^p.$$

次＝上ト同様＝形式的ナ方法デ

$$\int_1^\infty M^*(x)\,dx \doteqdot -const\int_1^\infty y\,dM(y)\int_1^y\frac{dx}{x}$$

$$= -\mathrm{const}\int_1^\infty y\log y\, dM(y)$$

ヲ得ルカラ $\mathrm{mes}(S) = \mathit{finite}$ ナラ $f \in L^1$ 且ツ

$f \in$ Zygmund class ナラ $-\int_1^\infty x\, dM^*(x) = \mathit{finite}$

即チ $f^*(x) \in L^1$ ヲ得ル。